

V. CL. ANDREÆ
TACQUET

SOC. JESU Sacerdotis &
Matheseos Professoris

**ELEMENTA
GEOMETRIÆ**

PLANÆ AC SOLIDÆ;
ET SELECTA

EX

**ARCHIMEDE
THEOREMATA.**

Accedunt COROLLARIA non pauca il-
lustrandis Elementis accommodata, & varios pro-
positionum plurimarum *Usus* continentia.

*Summa cura emendata, & XII Schematibus novis
ari. incis. illustrata.*

A GULIELMO WHISTON, A.M.
Matheseos Professore LUCASIANO
apud CANTABRIGIENSES

EDITIO SECUNDA,

aliquanto auctior, & emendatior.

CANTABRIGIÆ,

Impensis CORN. CROWNFIELD,

Celeberrimæ Academix Typographi;

Et Richardi Thurlbourne, & Gulielmi Dickenson,

Bibliopolarum Cantabr. MDCCX.

THE
ACQUITT

THE
MAY

THE
MAY



THE
MAY

PRÆFATIO.

CUM apud nos decretum esset Elementa
Geometriae Euclidæ juxta P. Cl. Andream
Tacquet editionem recudere, dedi operam
ut quam emendatissimam, nec sine auctaritis
e novo nostro Typographo prodiret. Atque equidem
Editio hæc Tacquetiana, quam haud immerito ele-
gantissimam vocat nostra professionis Pater Cl. Bar-
rovius; præ aliis non semper visa est, & explicandi
facilitate, & demonstrandi perspicuitate reliquis pal-
mam præcipuisse. Neque aliam fuisse Doctiorum de
eadem sententiam, Publicus Geometricarum usus sua-
dere videtur. Vix aliam formam Elementorum Eucli-
deorum sæpius impressam, aut manibus fre-
quentius tritam videre licet. Quam & illa quoque
ad accuratam hanc præ reliquis editionem, quam
integram hic damus, animos addiderunt, quod præ-
cipua Archimedis, Geometria plane summi, & Sphæra,
Cono, atque Cylindro Theoremata, nec contra non
cara ad calcem exhiberet; & in reliquis Editoris no-
stri operibus Mathematicis, eruditissimis sane, & ad
usum Tyronum scientias hæc proposito plane aggre-
dientium optime accommodatis passim citata exaret.
Desuerunt quidem, aut mihi saltem defuisse visa sunt
etiam in optimis hisce elementis nonnulla, quæ si habe-

P R Æ F A T I O.

rebus, discentibus essent haud parum emolumenti gl-
 latara. Neque in secundo libro methodum demon-
 strandi incipientibus paulo difficiliorem. In quarto pra-
 portione doctrinam in se facilitatam per ambages
 nimias exposuam. Atque etiam ob corollariorum pra-
 edictorum defectum, Elementa nimis abstracta, gra-
 cilia, & redii plena causabar. Quocirca omnia ad
 incudem revocare, & quae desiderari posse videbantur
 supplere, in animam inieci. Secundi namque libri de-
 monstraciones plenaeque tam rectorum construo-
 ctione, tam exemplis numericis illustravi: Doctri-
 nam de proportionibus, quae in quinto libro complecti-
 tur, summam & brevissimam exposui: Et quod in
 nostro opere, & in universo hoc studiorum genere
 palmarium reor, scilicet propositionum Usus sive
 theoremas, sive practicos, (faciliores nimirum, &
 quales discentium capere essent accommodi) condi-
 menti instar, atque incrementi haud raro apposui.
 Quae cum ita sint, fas sit sperare Elementa Geome-
 trica jam tandem, etiam ordine Euclideo non mu-
 tato, & facilitata, & si ita fore comparata, in Ele-
 mentiis aliis novo ordine atque methodo demonstan-
 dis non sit opus futurum. Minime enim placet
 eorum ratio, qui prima Geometriae elementa alibi
 quam apud Euclidem, quam solam tanquam uni-
 versam Elementarem Conditorum citant ubique Mathe-
 maticorum libri, & bis mille annorum usus satis
 comprobant, quod cum. Hisce quidem perlectis,
 atque in sacrum, & sanguinem versis pergant ul-
 terius Typum, quoquo patet Mathematicus Campus,
 quaque docet Neotericorum solertia, in plerisque
 sane longe felicissima: sed Duce, atque Auspice Eu-
 clide pergant. Juvat antiquos exquirere fontes: &
 ingens erit mora, operaque pretium calculo analyti-
 co, indivisibilium methodo. Infinitorum Arithmetica,

P R Æ F A T I O.

Et novissime fluxionum doctrina Constructionem Veterani Geometrarum Symbolicam, tanquam Scientiarum Subemmaticarum basim incunassam, praestitisse & pralibasse.

Sed etiam Lector, me Corollaria ista quibus Vna propositionum continetur, e celeberrimis Elementorum scriptoribus, De Chales, Barrowio, Barro, Sturmi, et ipsorum etiam Tacqueti alibi, atque e Geometrarum Principe Isaaco Newtono, quem honoris etiam causa nominis, potissimum mutuo accepisse; perpaucas enim quas de peno proprio profero, dignas non sunt quae seorsum memorantur. Quae vero de Elementis a Cl. D. de Chales editis deprompsi cum haud pauca sunt sine lineolis separatricibus cernuntur; reliqua vero inajusculis uncinulis [] includantur; Ita tamen universa, ut quae Tacqueti nostro aliunde accedunt, Characteris diversitate ubique dignosci possint.

Cuiquam autem auctor esse nollem, ut librum integrum simul & semel sibi perlegendum imponat: In secundo enim libro, probationibus & illustrationibus nostris contentus esse potest, prima saltem vice; & in libro quinto, e Monito nostro ad Tyrones, generalium de proportionalibus ratiocinandi modorum probe memor, ad Librum sextum illico accedat; quod sane si tum nequeat intelligere, causam non tantam quin propositiones libri 5. particulares prius omissas repetat. Quae etiam circa Paradoxorum de Contactus Angulo solutionem post prop. 18. Lib. 3. asferuntur, cum ad Elementa non pertineant, neque ita solida videantur, ita omitti poterunt. Reliqua autem summa (nisi forte nonnullas axiomatum sua luce clarissimorum demonstrationes minus necessa-

PRÆFATIO.

res exuperis) digna sunt omnino quæ non tantum
legantur, sed & formis inmensis acris animis in-
fusa habeant; nunquam Scientia inter humanas longe
prestantissime, & certissima principia vere Aeterna, &
nunquam satis laudanda; quibus quidem dubiis non
tantum Geometria, sed & Physica etiam, & Astro-
nomia extra Solis, & Solis, & ceteris in immensum
erectum, & ceteris in immensum erectum, dum Scientia
per Patrem, & ceteris in immensum erectum, dum Scientia
per Patrem, & ceteris in immensum erectum, dum Scientia

Scriptum a Georgio III. Colo-
danti Martii 1793.

O Deus Geometriæ.

Tu autem Domine, quantus es
Geometriæ, quam enim hæc
scientia nullos terminos habeat,
tam in sempiternum novorum Theo-
rematum inventioni locus relinquatur,
etiam penes humanum ingenium, Tu
uno hæc omnia intuitu perspecta ha-
bes, absque catena consequentiarum,
absque radio demonstrationum. Ad
cetera pene nihil facere potest intel-
lectus noster; & tanquam brutorum
phantasia videtur non nisi incerta quæ-
dam somniare, unde in iis quot sunt
homines, tot existunt fere sententiæ:
in his conspiratur ab omnibus, in his
humanum ingenium se posse aliquid,
imo ingens aliquid & mirificum visum
est, ut nihil magis mirum, quod enim
in cæteris pene ineptum, in hoc effi-
cax, sedulum, prosperum, &c. Te igi-
tur vel ex hac re amare gaudeo, Te sus-
picere, atque illum diem desiderare sus-
piriis

piriis fortibus, in quo purgata mente
& claro oculo non hac solum omnia,
absque hac successiva & laboriosa ima-
ginandi cura, verum multo plura &
majora, ex tua bonitate, & immensi-
sima sanctissimaeque benignitate con-
spicere, & seise concedetur, &c.

Cl. Barro in Verba Epistolae suo praefixa.

Nota quod haec Mathematicorum in hac editione usurpata.

$=$ Nota aequalitatis. Sic $a = b$, a aequatur b .

$+$ Nota additionis. Sic $a + b$, a plus b .

$-$ Nota subtractionis. Sic $a - b$, a minus b .

$\times$ Nota multiplicationis. Sic $a \times b$, a multiplicatum per b .

$::$ Nota rationum aequalium. Sic $A : B :: a : b$. Ut A est ad B , ita a est ad b .

$::$ Nota proportionis continua. Sic $A : B : C ::$ Ut A est ad B , ita B est ad C .

q Nota Quadrati. Sic CBq , Quadratum lateris CB .

AMICE LECTOR.

CUM multis jam annis Elementorum Geometricorum, minoris formae, in hisce locis penuria laborantium esset, visum denique est ad usum studiosae juvenutis, cujus gratia hunc laborem qualemcunque suscepi, novam editionem adornare; in qua quid praestitum sit, paucis accipe.

1. In primis Geometriae planae ac solidae elementa conjunxi, ne (ut fit plerumque) semper in planis tyrones haerent; sed ab his transeant ad solida; quorum summe necessaria cognitio est.

2. Propositionum hypothesebus & assertionibus litteras parenthesi inclusas, quibus ad figuram referri possunt, apposui: quod consilio feci, ne ante demonstrationem, iterum explicanda assertio, adeoque idem his repetendum esset: & tamen literis à reliquo sensu parenthesi separatis, sua assertioni universalitas constaret. Assertionem igitur conveniet legere primum literis praetermissis; tum si non intelligas, te litera ad figuram ducem.

3. Propositiones aliquas praetermisi, quarum fere vel nullus usus est, aut certe non altius, quam ut per eas demonstretur alia, quae sine illis facilius via poteram demonstrare. Eosdem tamen propositionum retineo numeros, quos Euclides, ordinemque servos, quem bis mille annorum usus probavit.

4. Demonstrationes vel novas afferro, vel antiquas breviores plerumque ac faciliores conor efficere. Et prolixitas quidem raro prodest. Ea siquidem tardiores & hebetiores non juvat, subtilibus autem & ingeniosis molesta est.

5. Quamvis autem brevis esse studuero, existima tamen, me à proposito non recedere, si ea addiderim, quae Geometriam discere volentibus futura

usui videbantur. Itaque Corollaria & scholia adjuuxi non pauca, quae usui longo didici in elementis desiderari. Geometriae practicae fontes indico suis locis. Tum si quid illustre ad rem occurreret, non omisi. Varia deinde in quibus laboratum hucusque fuit, vel explicare vel demonstrare conatus sum.

6. In libro primo parallelorum theoria demonstratur independentem ab undecimo axioma, quod non axioma, sed theorema est, & quidem non nisi difficulter ac longo circuitu demonstrabile.

7. Secundum librum, in quo laborare multum tyrones solent, disposui ad eum fere modum, quo jam analytici scribunt aequationes suas. Quam si exacta tenere voluissent, fuisset quidem res brevior; sed minus, ut arbitror, tyrannicus accommodata.

8. In libro tertio ad prop. 16. paradoxa anguli contactus, quae hactenus torserunt omnes, solvuntur.

9. In quinto libro, proportionum doctrinam, ut quidem ab Euclide traditur, satis sparsam, efficere pleniorum conatus sum. Itaque primam proportionum elementa faciliiori quadam methodo, multiplicibus ablegatis, traduntur. Deinde huius libri scituam definitionem, qua proportionum aequalitas per multiplices explicatur, ostendi non definitionem esse, sed theorema, & quidem difficile & perobscurum; cuius tamen demonstrationem exhibemus, hactenus a nullo datam. Itaque ita demonstrationes Euclidae quae hinc ducuntur omnes, si quis forte illas pro nostris probationibus desideret, stabilivimus. Tum aliud quoddam aequalium proportionum assuetum ac demonstrandi indicium uniuersale, primum, facillimum, ex quo omnes quinti libri propositiones demonstrare potuissim, si hoc conducere discipulis iudicassim. Postremo de proportionibus non pauca scitu necessaria subiungo; ac in primis demonstro axioma illud percelebre seu potius theorema, proportionum extremorum ex quolibet intermediarum proportionibus componi,

componi, id quod hactenus in Geometria fuit desideratum.

10. Librum duodecimum, cujus difficiles ac prolixae demonstrationes discipulis erroris esse solent, alia via plus quam decies breviori demonstravi. Quod ita se habere, qui haec nostra cum Euclide ejusque commentatoribus cunctis, deprehenderit.

11. In libro quarto, sexto, undecimo praestant ea quae antea supra indicavimus.

12. Denique selecta ex Archimede theoremata alia similiter ac breviori via demonstrata nascuntur; cuiusmodi illius de cylindris ac sphaera doctrinam postremis duodecim propositionibus repositis, amplioris, quibus inter cetera demonstrat sphaeram esse proportionalem ad eam in cylindro sphaeram repertam, ad cylindrum coincidentem sphaerae circumscriptum, tam in solidis, quam in superficiei commensuratum. Euclidi porro Archimedes ille subnectit, non quae adhaec elementa, sed quia subtiliorum partem, utque usum eximia sunt. cum deinde ut Geometria candidatus intelligat, cum maximi Geometra invenit admiranda assidue sese viderit, nihil in Aristotele futurum tam fabule vel arduum, quod his inferioribus elementis percipere non possit.

Tu haec habes; & si placuerit, lege ac discis; inventurus in his principia universae, & serie omnium antiquissima scientiae, quae quidem tibi, quam sub nocte,

HISTORICA NARRATIO

De ortu & progressu Mathematicae.

MATHEMATICA elementa tradituro, visum est de illorum origine ac praestantia praefari quedam, ut intelligant Mathematici candidati, quomodo haec scientia sit, cui se condecoraturi sunt, & planum fiat adversus eos qui se ignorantes committunt, quanta dignitas haec sit disciplina, quae omnium rerum speciem illis variis incredulis studio sibi praeberint comparandam. Quam parum mihi fuit, in hac relatione, commendanda Petri Rami diligentia, qui scholarum toto primo libro hanc regiae Mathematicam Historiam de Proclo, Eudemo, Theophrasto, Gellio, Polybio, Ptolemaeo, aliisque auctoritate copiose conscripsit.

Prima hominum scientia Mathematica fuit, si Josepho credimus. Is lib. 2. cap. 3. scribit Sethi nepotes Caelorum ordinem ac siderum cursus observasse. Ne autem haec inventa ex hominum notitia dilaberentur, ait Adamus universalem mundi moventem fore, praecipisset, unam diluvio, incendio alteram, exciderunt duas columnas, alteram lateritiam, alteram lapideam: & utrique sua inventa inscripserunt, ut si lateritiam diluvio deleri contingeret, lapidea superstes, hominibus discendi copiam faceret, & quae inscripta continebat, spectanda exhiberet. Aiunt enim lapideam illam ab ipsis dedicatam: quae & nostris temporibus extat in Syria. Haec ille, penes quem fides esto.



5

Post diluvium primos mortalium Assyrios & Chaldaeos Mathematica coluisse tradunt idem Josephus, Plinius, Diodorus, Cicero. Sed ortæ & florentes apud Chaldaeos Mathematicæ artes, deinde ex Chaldaea & Assyria ad Ægyptios translatae sunt Auctore Abrahamo. Is enim cum Deo iubente ex patrio solo in Palaestinam, ac deinde in Ægyptum profectus esset, cerneretque Ægyptios artium bonarum capi studio, atque indole ad discendum egregia esse, ut apud eundem Josephum est lib. 1. cap. 9. Arithmetica illis Astronomiamque, quam præcedere Geometriam necesse fuit, communicavit. Quibus deinde studiis adeo Ægyptii florere, ut Aristoteles 1. Metaph. cap. 1. affirmet Mathematicas artes primum in Ægypto à sacerdotibus publica vacatione fretis inventas esse.

Exinde Matheſis ex Ægypto mare trajiciens ad Græciæ Philosophos pervenit: Thales enim Milesius, qui ante Christum floruit annis 584. primus Græcorum cum in Ægyptum venisset, Geometriam inde in Græciam tranſtulit. Is sane, præter alia, primi libri propositiones, 5. 15. 26. invenit. Eidem debentur 2. 3. 4. 5. 1. 4. cujus inventi latitia elatus bovem immolasse dicitur. Idem Æquinoctia & Solstitia observare coepit. Laertio teste; & solis eclipsim, ut scribunt Hippas & Aristoteles, primus prædixit; & Tzerzes Auctor etiam eclipsim lunæ Regi Cyro prænuñcialle. Quapropter hic primus in Græcia Mathematicæ scientiæ parens atque Auctor fuit.

Post hunc Pythagoras Samius: ille philosophorum antiquissimus, Mathematicas disciplinas vehementer auxit ornavitque. Et Arithmetica quidem ita coluit, ut omnis prope illi ratio philosophandi ex numeris duceretur. Geometriam vero,

ut refert Laertius, à materia abstraxit primus; in qua mentis elatione invenit 32. 44. 47. 48. lib. 1. Sed imprimis ob inventas 32 & 47 lib. 1. celebratur, & hujus quidem inventionis lætitia tanta affectus est, ut teste Apollodoro apud Laertium, hecatobem immolarit. Idem incommensurabiles magnitudines, & regularia quinque corpora primus aperuit. Idem Astrologiam & Musicam impense & docuit & exercuit. Neque solum acute & subtiliter multa invenit, sed etiam ludum primus aperuit, in quo juvenus tam honestas, tamque nobiles artes addisceret.

Pythagoram Anaxagoras Clazomenius & Oenopides Chius secuti sunt, quorum meminit Plato in Amatoribus, ubi adolescentes de Anaxagora & Oenopide in circulorum descriptionibus conotantes inducit. Ab Anaxagora Geometriam quandam scriptam indicat Aristoteles; & ex Laertio accepimus ostensum ab eò solem Peloponneso majorem; (nota Astronomiæ incunabula,) eundemque de habitationibus in luna nonnulla disputasse. Oenopidi adscribit Proclus 12. & 23. l. 1. Hos exceperè Briso, Antipho, & Chius Hippocrates, omnes, tentata circuli quadratura, ab Aristotele reprehensi pariter & celebrati. Sed hos inter longe clarissimus Hippocrates fuit, ille è mercatore philosophus & Geometra, qui præter circuli quadraturam, etiam cubi duplicationem prius tentavit per duas medias proportionales, quam viam ut singularem & unicam omnis posteritas amplexa est. Illius etiam illa propria & magna laus est, quod Proclo teste, elementa primus scripserit, & ab illis inventa ordinaverit.

Democritus non in Philosophia solum, sed etiam in Mathesi admirabilis fuit. Ejus tum Physica, tum forte etiam Mathematica monumenta perierunt in-
vidia

vidia (ut quidam ferunt) Aristotelis, sua unius scripta cupientis legi. Democriti Philosophiam Petrus Gassendus eruditissimo opere nuper edito instauravit. Theodorus Cyrenaeus, licet ejus inventa Mathematica non extent, vel eo nomine magnus est, quod Platonis Magister fuisse memoratur.

Ad Platonem igitur aliquando pervenimus, quo nemo alius splendorem majorem attulit Mathematicis disciplinis. Ille Geometriam maximis accessionibus amplificavit, studio incredibili in eam collocato. Et inprimis reperta est ab eo Analysis, certissima inveniendi & ratiocinandi via. Philosophiae suae libros Mathematicis rationibus distinxit, ac quidquid in Mathematicis admirabile conjunctum cum Philosophia esset, excitavit. Academiae foribus inscriptum legebatur: *οὐδὲν γέωμετρον ἐστὶν ἀνόητον*: nullus Geometriae expertus accedito: illustri sane argumento quam non aliena sed propria, quamque non inutilis, vel indecora, sed honesta & commoda Mathesis, sane certaeque Philosophiae sit. Quantus certe Plato Matheseos fuerit & admirator & cultor, is demum intelliget, qui ejus monumenta perlegerit.

Ex Platonis Academia prope innumeri deinceps Mathematici prodierunt. Tredecim Platonis familiares à Proclo commemorantur, quorum studiis Mathematica sit absoluta. Hinc Leodamus Thasius, Archytas Tarentinus, Thextetus Atheniensis; à quibus Mathematica egregie sunt amplificata. Leodamus Analysis à Platone acceptam exercuit, ejusque opè invenisse multa à Laertio dicitur. Thextetum tum inventa sua, inter quae Elementa ab eo scripta & regularium corporum inscriptio celebrantur, illustrem faciunt, tum Platonis encomia, qui etiam illius nomini dialogum inscripsit.

Archytas Elementa scripsit etiam ipse, ejusque duplicatio cubi apud Eutocium legitur, cuius etiam illa singularis fuit laus, quod Mathematicam ad humanos usus traduxerit fere primus; unde & lignea columba ab eo facta volasse legitur apud Gellium. Quem secuti Dædalus atque artifices, fabulis poetarum materiam præbuere. Archytas porro & Mathematicus fuit & exercitus Imperator, qui nimirum in patriis bellis copiis civium suorum quinquies præfuit & quinquies vicit. Neoclides tantum nomen celebratur, Leonte fortassis discipulo illustrior quam inventis suis. Leon sane Mathematicæ universa elementa conscripsit, auxit, & ad usum aptiora fecit. Quare inter præcipuos elementorum conditores suo merito censeri debet.

Eudoxus Cnidius superiorum æqualis: in Arithmeticis magnus, & (si Scholasta Græco credimus) totum ei Quantum librum debemus; Elementa item conscripsit, & generaliora effecit, & sectiones à Platone inchoatas auxit; insuper Astronomicarum hypothesium primus fabricator extitit, & Geometriz fontes, ut supra Archytas, ad organicam ac mechanicam derivavit. Amyclas, Heraclæotes & Menæchmus, cuius frater Dinostratus, Helicon Cyziceus, & pseudus, Hermotimus Colophonius, Philippus Medmæus, omnes Platonici, Geometriam multo perfectiorem reddiderunt. Et Menæchmus quidem sectiones conicas invenit, ac harum ope duas medias, cuius inventio ab Eutocio reliquis præfertur. Theudius & Hermotimus elementa fecerunt universaliora & auctiora. Atque hi omnes ex Platonis Academia, Mathematicam Philosophiam ad perfectionem adduxerunt, ait Proclus. Sed & Xenocrates Platonis auditor, & Aristotelis magister, ipseque Aristoteles cognitione

tionem Mathematicam clari fuere. Illius cum auditor quidam esse veller Geometriæ imperitus, Abi, inquit, anfas enim Philosophiæ non habes.

De Aristotele vero quid dicam? libri illius omnes locis Mathematicis sunt referti, ex quibus in unum collectis librum confecit Blancanus. Ex Aristotelis schola duo præcipue celebrantur, Eudemus & Theophrastus. Hic scripsit de numeris libros duos, de Geometria quatuor, de lineis indivisibilibus unum: ille historiam Mathematicam condidit, ex quo Proclus aliique sua mutuati sunt. Aristeo, Hido, Hypsicle Geometris subtilissimis solidorum libros maxime debemus. Denique Euclides aliorum inventa collegit, ordinavit, annexit, demonstravitque accuratè, eaque nobis reliquit elementa, quibus jam ubique terrarum ad Mathematicam juvenes instituntur. Obiit anno ante Christum 284. Eundem secuti sunt centum fere post annis Eratosthenes & Archimedes. Eratosthenis clarum ingenium non fuit, sed ejus scripta perierunt. Archimedi habemus multa, multa amisimus.

Sed Archimedes cum nomino, apicem quendam humanæ subtilitatis, totiusque Mathematicæ disciplinæ absolutissimè summo concipio. Ejus inventa admiranda prædicere Polybius, Plutarchus, Tzetzes, aliique. Archimedi coævus fuit Conon Geometra & Astronomus, cujus mortem Archimedes deflet in lib. de quad. parab. Archimedes & Cononem intervallo non magno sequitur Appollonius Pergæus, alter Geometriæ princeps, qui egregiæ laudis encomio magnus Geometra fuit appellatus. Illius extant quatuor [anno septem] Conicorum subtilissimè libri. Eidem adscribuntur Euclidis libri 14. & 13. ab Hypsicle contracti. Hipparchus & Menelaus, de
sub

hæc temporibus à Francisco Vieta, & Renato
Cartesio multo perfectior & universalior effecta
est. Reliqui inter veteres celebrantur Nicoma-
chus Arithmeticis, Geometricis, Musis etiam
monimentis; Serenus binis de cylindri sectione
libris Geometris notissimus; Proclus, Pappus,
Theon. Quantum Mathematicus fuerit Proclus,
ex doctissimis ejus in Euclidem commentariis;
aliisque scriptis manifestum est. Atque hic opi-
nor ille est, qui, ut refert Zonaras, & ex eo
Ramus, ac Baronius, sub annum Christi 514.
Vitaliani classem Constantinopolim obsidentis, op-
tico speculorum artificio combussit. Theonis lau-
des vere magnas mirabiliter exaggerat Petrus Ra-
mus, ut etiam libros, quos Euclidi hætenus ad-
scribere omnes, Theoni putet attribuendos. Sed
iniquior ubique in Euclidem Ramus, neque ul-
lo solido nixus fundamento, hic audiendus non
erit. Ut finis aliquando sit, egredietur Pappus clau-
dat tempore inter veteres postremus, ut qui vix-
erit circa annum 400. sed nominis claritudine,
omnique laude Mathematicum primis adnumeran-
dus. Quæ ante Hypsiclem, Ctesibium, & Dio-
phantum protulerat fecunda ingeniorum parens
Alexandria, hunc quoque ingenti bono Mathe-
seos dedit. Scripsit collectionum Mathematica-
rum libros septem, e quibus duo primi perie-
runt. Reliqui quinque tam multis abundant,
tamque varii ex omni prope genere Mathema-
tum nobilissimis inventis, ut inter prima quæ
erant veterum monimenta, ab omnibus censcan-
tur.

Habetis originis ac progressionis Mathematicæ
historiam brevem. Ex qua Matheseos antiqui-
tas, præstantia, ac dignitas apparet. Sane Reip.
literaria Principes iidem qui Philosophiam, etiam
Mathe-

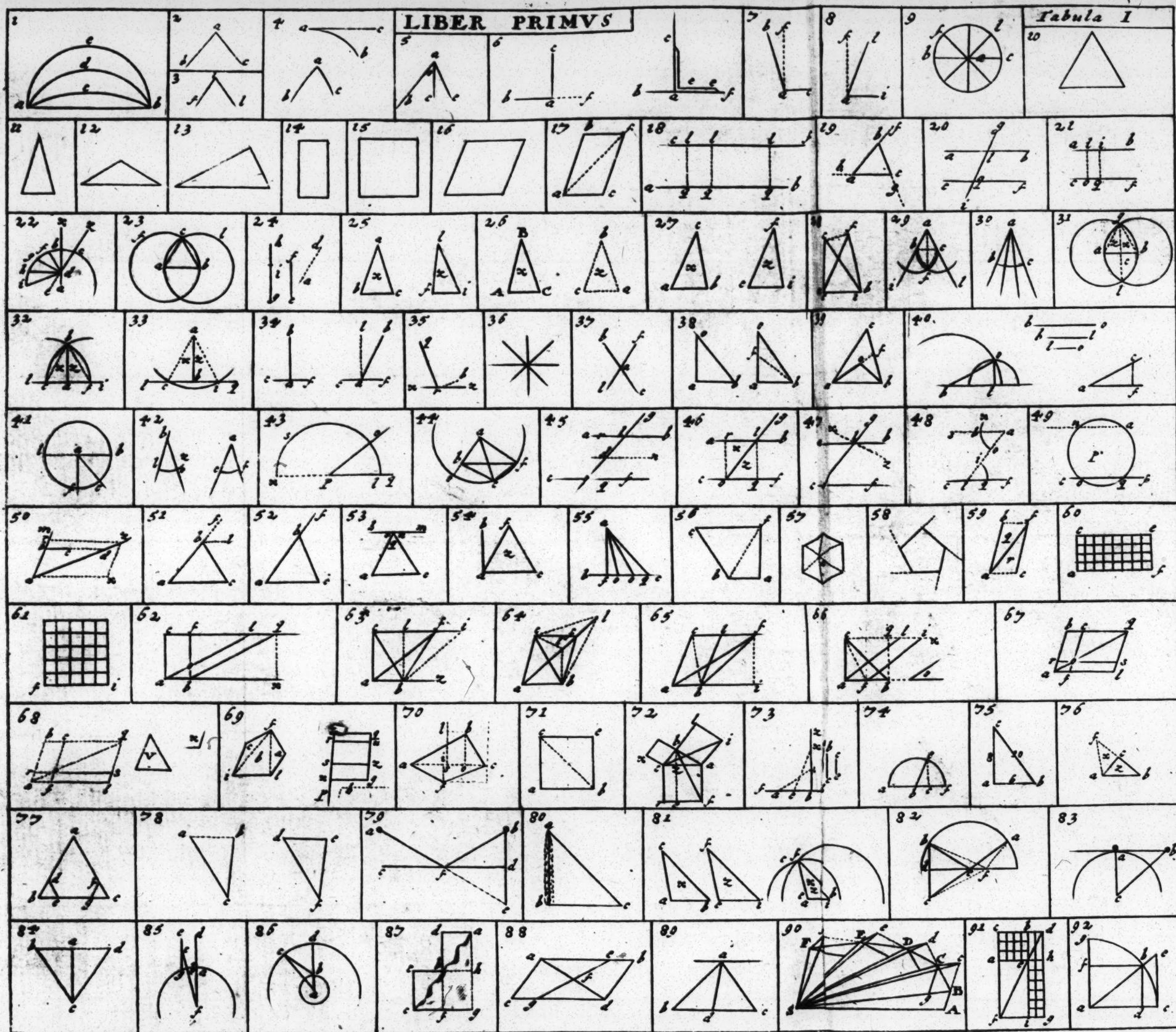
Mathematicam, quod & gemellas sorores partu ve-
lit uno, quasque dissimulare ab invicem violente
velit, ne illarum naturam illarum concordiam, cum
inter se vera crudelis sit; quando, quod fieri in
rebus solet, uno vel loco vel morte sublato,
laqueare, quum & contabescere alteram necesse
sit.

EEE

ate
um
to
co,
ffe

5

Tabula I





ELEMENTORUM
GEOMETRIÆ
LIBER PRIMUS.

1. *Principiorum* proprium munus est, ex rationibus
 simplicissimis, rationali naturæ a se ipsis
 non impressis, elicere aliquid, quod prius non
 erat, atque inde ratiolum aliquid addere; unde
 semper ad ulterius progrediendum, et
 accedendum, ex minimis et simplicissimis
 cognitionibus pertingemus. Hanc methodum
 rationemque scientiæ, per omnibus amplecti
 possunt, quæ in quantitatibus contemplatione
 versantur, factum sit, scire omnes, qui huc
 spectant, sive Geometria, sive de aliis Mathematicis
 tractant, sive Naturæ, quæ præ se
 ostendit, ex humillimis et simplicissimis
 cognitionibus, quæ sunt, per
 demonstrationem prædictam, ad
 verum, vel admittitur, quod
 sit de eorum. Atque ita
 omnino sciri de rebus
 et evidentia immutabilibus.
 Principiorum generis, quibus
 omnis deriva-
 tur, *Maxima*; *Definitio*; *Postulatum*; *Axioma*;

Valeat autem Euclides in primis de Propositionibus, quibus
Geometriae principia exponere. Quibus ad
dum fuerit. Definitiones, seu vocum usitissimarum. Post
Præmissis: hisce vero Postulatis, quibus
ab omnibus sane mentis facile concedenda sunt. Ac primis
clarissimis, quibuslibet, atque simplicissimis, quibus
posterioribus non infertur, necesse, propositis. Quibuslibet, nec
argumenta infallibilis ubique adhibet. Quibuslibet, quibuslibet
tamen vel quibuslibet, quibuslibet, quibuslibet, quibuslibet
autem extorqueat. In primis autem de Lineis, quibuslibet, quos
ita concurrente formant. Angulis tractat. Quibuslibet, quibuslibet
primis 8. de triangulis planis agit: simulque Angulorum pla
norum naturam explicat. Post propositiones istas, Angulos Li
neasque

Vel plana superficies est, cuius extremi obumbrant omnia media. [Oculus nimirum in ipsa superficie producta posita.]

Vel plana superficies est minima omnium eodem terminos habentium. Idem sensus est omnium.

Non definiuit hic corpus, sive solidum Euclides, quia nondum hic erat actus de corpore. Hoc autem tamen illi definitionem desideret: corpus est magnitudo longa, lata, et profunda. Tres igitur dimensiones habet corpus, superficies duas, lines unam, punctum nullam.

8. Angulus planus est duarum linearum, in plano si mutuo tangentur, et non in directum jacentium, sive ad alteram inclinatis.

Angulum igitur efficiunt duae lines BA , CA sive ut *Fig. 2. 4.* tangentes in A , sic ut non colligantur in directum; hoc est, ut efficiant unam lineam.

9. Crura seu crura anguli sunt lines, quae angulum efficiunt.

10. Vertex anguli est punctum (A) in quo crura sibi invicem occurrunt. *Fig. 2. 4.*

Cum angulus est unicus, sive crura ad unumquemque punctum ad figuram. Cum plures ad unum punctum concurrant, designantur tribus litteris, quarum prima est vertex, et secundae sunt crura. Sic in figura C angulus est BCA , sive BCA *Fig. 5.*

11. Anguli aequales, vel potius aequales, sunt, cum sibi invicem vertices imponantur, latera autem sibi invicem aequantur. Ad hoc non sufficit, ut latera aequo longa.

12. Inaequales, seu dissimiles, dicuntur, cum vertex unius lateris congruat alteri, alterum vero congruat: sic ille maior dicitur, cuius latera sunt maiora. Sic angulus BAC *Fig. 1.* maior est angulo BAC .

Angulus non mutatur, nec augetur, licet crura minuas vel augeas.

Porro quia anguli mensurae linearum inclinatio, inclinatio autem linearum quantitas non est, angulus ulla quantitas est. Sed et eodem modo mensurae quantitas, quae angulus, non ab inclinatio, sed ab inclinatio, quam inclinatio est inclinatio. Quando igitur cum Euclido, aliisque Geometricis anguli aequales esse dicimus, illud aliter quam inclinationum similitudo, hoc est, laterum congruentia indicabimus. Vnde quae de hoc re plenius dicuntur, sunt post propositionem 16. l. 3.

Fig. 2. 4.

13. Angulus rectilineus est, quem rectæ lineæ efficiunt, curvilineus, quem curvæ; mixtus, quem recta & curva.

Fig. 6.

14. Cum recta (CA) super rectam (BF) consistens, in neutram inclinat partem, ac proinde angulos utrinque facit æquales (CAB) & (CAF), rectus est; uterque æqualium angulorum: Recta autem (CA) alteri insistens dicitur perpendicularis, seu perpendiculum.

Fig. 6.

Angulus rectus sic etiam definiri potest.

Rectus angulus is est (BAO) cui a parte altera æqualis oritur (CAF), si unum latus (BA) produxeris.

Deinde sic compactæ ut angulum rectum efficiant, instrumentum efficiunt, quod norma appellatur. Illius inventionem Vitruvius lib. 1. 9. affirmat Pythagoram. Tanta vero anguli recti in ædificiis omnibus constructis, dimensio, formæ, & finis, ut nihil fere esse sine illo possit. Normæ huiusmodi sic inscribitur. Ejus latus AE applica rectæ lineæ AF, & iuxta latus alterum describatur recta CA. Conversa deinde norma versus B, si utroque latere congruat rectis CA, AB, scito esse legitimam & exactam. Ratio patet ex ipsa def. 14.

Fig. 7.

Fig. 8.

15. Obliquus angulus est (BAC) qui recto (FAC) major est.

16. Acutus angulus est (BAC) qui recto (FAC) minor est.

17. Punctum est superficies puncti, una vel pluribus lineis unita.

Fig. 9.

18. Circulus est figura, unius lineæ circumferentiæ comprehensa, circumferentiæ dicitur, à qua ad aliquod punctum æquidistantum (A) omnes, quæ ductæ possunt rectæ lineæ, sunt æquales.

Fig. 9.

19. Hoc vero punctum centrum appellatur.

20. Diameter est recta per centrum ducta, (BC,) ad circumferentiæ utrinque terminata, & circumferentiæ dividens; [sic ex æquidistantiæ punctulorum sibi invicem super oppositorum congruentia abunde liquet.]

Fig. 9.

21. Semidiameter, live radius est recta (AF) ex centro ad circumferentiæ ducta.

Fig. 9.

22. Segmentum est figura (BLC) comprehensa a diametro (BC) & a portione circumferentiæ (BLC).

Fig. 9.

Circulus movetur: si recta (AB) uno extremo suo (A) fixo, altero (B) circumferentiæ applicetur, recta ipsa circumferentiæ circumferens, dum altera (B) circumferentiæ circumducitur. Porro si duo circuli duos vel ipsius motu, seu tractu, ad ejus motus generum contraria concurrunt, motus & quies, dum linea movetur, & ejus extremum quiescit. Deinde generantis puncta omnia, cum inæquales eodem tempore periodos absolvant, diversa celeritate moventur.

Tertio

Tertio peripheria circulum ambiens, constat quodammodo ex contrariis & extremis sine medio; ex concavo nimirum & convexo, inter quæ rectum ita medium est, ut æquale inter magnum & parvum; idque eo mirabilius est, quod ea contraria insint lineæ nullam latitudinem habenti. Hæc tria Aristoteli vilia sunt admiranda, ex quo illa deprompsimus. At prodigia circuli longe majora aperuimus in dissertatione Physico-Mathematica, quam una cum Cylindricis & Annularibus in lucem emisimus anno 1652. Isthic ea leget, qui volet.

Circumferentiam Mathematici partiri solent in 360. æquales partes (quas gradus vocant) ob multas illius numeri commoditates: semicircumferentiam in 180. quadrantem in 90.

23. Rectilinea figura, est superficies plana, rectis lineis undique terminata.

24. Triangulum, sive trilaterum, est plana superficies tribus rectis comprehensa.

Hæc figurarum rectilinearum prima ac simplicissima est, in quam cæteræ omnes resolvuntur.

25. Triangulum æquilaterum est, quod tria latera habet æqualia. *Fig. 10.*

26. Triangulum Isosceles, seu æquicruræ, quod duo tantum latera habet æqualia. *Fig. 11, 12.*

27. Scalenum, quod tria latera inæqualia habet. *Fig. 13.*

28. Rectangulum triangulum est, quod unum angulum habet rectum. *Fig. 13.*

29. Obtusangulum triangulum est, quod unum angulum habet obtusum. *Fig. 12.*

30. Acutangulum triangulum est, quod tres habet acutos angulos. *Fig. 10, 11.*

31. Inter figuras quadrilateras, rectangulum est, quod quatuor angulos habet rectos, adeoque æquales: sive latera æqualia sint, sive non. *Fig. 14, 15.*

32. Quadratum est, quod æquilaterum & rectangulum est, ac proinde æquiangulum. *Fig. 15.*

Omne quadratum est rectangulum sed non contra,

33. Rhombus est, qui æquilaterus, sed non æquiangulus est. *Fig. 16.*

34. Rhomboides, quæ adversa latera & angulos habens æqualia, neque æquilatera, neque æquiangula est. *Fig. 17.*

35. Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera (AB, FC, & BF, AC) sunt parallela. Quid vero sint parallele, dicitur seq. defin. *Fig. 14, 15.*

Omne rectangulum & quadratum est parallelogrammum, ut suo loco demonstrabitur; sed non contra.

36. Rectæ lineæ parallele seu æquidistantes sunt, quæ in eodem

eodem plano existentes, utrimque in infinitum protractæ, æqualibus semper intervallis inter se distant.

Æqualia intervalla assumuntur penes perpendiculares. Quare si omnes ad unam ex duabus parallelam AB perpendiculares QL, æquales fuerint, dicentur rectæ AB, CF parallelæ.

Generantur parallelæ, si recta LQ ad rectam AB perpendicularis, per AB semper perpendiculariter moveatur: tunc enim ejus extremum L describit parallelam CF.

Euclides definit parallelas esse, quæ utrimque in infinitum productæ, in neutram partem coincidunt. Verum quia dantur lineæ quæ simul in infinitum productæ, licet ad se mutuo appropinquent ad intervallum quovis dato minus, ac proinde, licet non sint parallelæ, nunquam tamen concurrant, (cujusmodi sunt Hyperbola & recta linea; conchois & linea recta; item duæ æquales parabolæ circa eundem axem descriptæ, & plures aliæ;) Non videtur per se notum esse, duas rectas licet nunquam concurrant, fore semper æquali intervallo distitas, hoc est æquidistantes: posset enim quispiam objicere, fieri fortassis posse, ut etiam ipsæ, licet ad se mutuo semper appropinquarent, tamen nunquam concurrerent. Quare Euclideæ definitio parallelismi naturam non satis explicat.

Fig. 17.

37. Parallelogrammi & cujusvis quadrilateri diameter [sive diagonalis] est recta (AF) per angulos oppositos ducta.

38. Figuræ planæ pluribus lateribus quam quatuor comprehensæ, multilateræ seu multangulæ, seu græca voce, polygonæ vocantur.

Fig. 19.

39. Rectilinearæ figuræ externus angulus est, qui latere producto extra figuram oritur. Tales sunt FBC, GCA, HAB. Tot igitur figura quælibet habet externos angulos, quot latera & angulos internos.

Postulata.

Postulatum est, quod facile fieri posse per se sit manifestum. Postuletur ergo, ut concedatur,

1. A quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.
2. Rectam lineam terminatam in directum & continuum protendere.
3. Quovis centro ad quodvis intervallum circulum describere.

Axiomata.

Axiomata.

Axioma est sententia per se manifesta.

1. Quæ eidem sunt æqualia, & inter se æqualia sunt. Et quod uno æqualium majus aut minus est, majus quoque aut minus est altero æqualium: & conversim.

2. Si æqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.

3. Si ab æqualibus demas æqualia, quæ remanebunt, erunt æqualia.

4. Si inæqualibus addas æqualia, tota erunt inæqualia.

5. Si ab inæqualibus tollantur æqualia, quæ remanent, erunt inæqualia.

6. Quæ ejusdem dimidia sunt, inter se sunt æqualia: & quæ ejusdem sunt dupla, vel tripla, vel quadrupla, inter se æqualia sunt.

7. Quæ mutuo sibi congruunt, æqualia sunt.

Non recte Clavius hoc Axioma convertit.

Falsum est enim, ea quæ universim inter se æqualia sunt sibi mutuo congruere: Dissimiles enim magnitudines possunt esse æquales, neque tamen congruent. Quod si similes & æquales fuerint, valebit conversa. Statuamus igitur axioma

8. Si rectæ lineæ æquales fuerint, sibi mutuo congruent; & anguli si æquales fuerint, sibi mutuo congruent.

9. Totum sua parte majus est.

10. Omnes anguli recti inter se æquales sunt.

Euclidis axioma undecimum est: Si in duas rectas (AB, CF) incidens recta (GI) angulos ad eandem partem interiores (BLQ, FQL) fecerit duobus rectis minores, duæ illæ rectæ si protrahantur, tandem concurrent ad illam partem, ad quam spectant anguli duobus rectis minores.

Hoc vero non est clarius illo, quod Prop. demum 29. Euclides ipse demonstrat: videlicet: si anguli (BLQ, FQL) fuerint duobus rectis æquales, rectæ (AB, CF) nunquam concurrent.

Quare axioma illud e principiorum numero cum Gemino & Proclo, aliisque Geometris rejecimus: est enim non axioma, sed theorema, idque demonstrabimus post Propositionem 31. hujus libri.

Ejus loco alia duo sequentia substituo, quorum veritas ex *Ex defn.* definitione parallelismi statim apparet. Esto igitur axioma ^{36.}

11. Parallelae lineæ communi perpendiculo utuntur.

Hoc est, recta, quæ ad parallelarum unam est perpendicularis, est quoque perpendicularis ad alteram.

12. Perpendiculara bina (LO, QI) ex parallelis æquales *Fig. 21.* utrimque interceptiunt partes (LI, OQ.)

13. Dux rectæ lineæ spatium non comprehendunt.
Ad hoc siquidem opus est ad minimum tribus.

14. Dux rectæ lineæ nequeunt habere segmentum commune: & omnes rectæ punctualiter se intersecant.

Fig. 22.

Rectæ AX occurrat recta ZD, ea si producat non perget per DA, sed in E, sic ut rectam XB non nisi punctualiter intersecet. Axioma ex notione ipsa rectæ lineæ evidentissimum est. Tamen quia nonnulli tam subtiliter philosophantur, ut credant rectas lineas, aliqua sui parte commisceri posse, lubet in eorum gratiam hoc axioma amplius declarare.

Habeant, si fieri potest, dux rectæ AX, AZ partem communem AD. Centro A describatur circulus, secans rectas in B & C, tum accipiat arcus BF æqualis arcui BC, & intelligatur ducta esse recta FA.

Rectæ igitur CA & FA eundem prorsus situm habent respectu rectæ BA. Sed recta CA cum recta BA habere dicitur commune segmentum DA, ergo etiam recta FA habet cum BA commune segmentum DA.

Tres jam igitur rectæ CA, BA, FA commune DA segmentum habent.

Sumatur rursus arcus FG æqualis prioribus BF, & CB, & intelligatur ducta esse recta GA. Rursus liquet rectas BA, GA, eundem habere situm respectu rectæ FA. Sed jam ostensum est rectam BA habere cum recta FA commune segmentum DA, Ergo etiam recta GA cum FA commune habet segmentum DA.

Jam ergo rectæ quatuor CA, BA, GA, FA commune DA segmentum habent. Eodem prorsus modo ostendam si per totam circuli circumferentiam sumantur arcus prioribus æquales, omnes simul circumquaque rectas lineas ductas ad A unum idemque habituras commune segmentum DA. Hoc tam immane absurdum sequitur ex eo, quod ponerentur binæ rectæ CA, BA habere segmentum commune. Impossibile est igitur ut dux rectæ segmentum commune habeant.

In hoc axioma vis tota nititur illius celebrati in scholis argumenti, quo demonstratur magnitudinem ex punctis omnino indivisibilibus numero finitis componi non posse: & est ejusmodi. Constat si fieri potest magnitudines ex punctis. Circa idem centrum descriptæ intelligantur quotcumque circumferentiæ circulares, & ponatur extrema seu maxima componi ex centies mille punctis, a quibus singulis ad centrum commune ductæ intelligantur rectæ lineæ.

Ex axioma jam explicato certum est rectas illas nusquam commisceri, nisi in centro solo. Quare dum omnes medias peripherias pertranseunt, in iis æque multa designant puncta,

ac erant in extrema. Omnes igitur circumferentiæ concentricæ æque multis punctis constant, ac proinde omnes inter se æquales erunt. Atque ita circumferentia hac in charta descripta æqualis probabitur circumferentiæ firmamenti. Aliis prope innumeris demonstrationibus hic error obruitur. Sed unam illam hoc loco attuli præ cæteris, quod passim sit decantata, & ex præsentis axiomate immediate pendeat.

Propositionum aliæ faciendum aliquid proponunt, & vocantur Problemata; aliæ in sola cuntemplatione sistunt, quæ Idcirco Theoremata inscribuntur.

PROPOSITIONES.

Citationes requisitæ reperiuntur ad marginem. Cum citantur propositiones, primus numerus designat propositionem, litera (L) cum numero sequenti librum denotat: ut si occurrat (per 5. l. 3.) ita leges (per propositionem quintam libri tertii.) Figura querenda semper est inter figuras ejus libri, in quo tum versamur: citationes reliquæ facile intelliguntur.

Traduntur hoc libro affectiones primæ triangulorum & parallelogrammorum. Propositiones illustriores sunt 32, 35, 37, 41, 44, 45, 47.

PROPOSITIO PRIMA.

Super data recta (AB) triangulum æquilaterum fig. 23. constituere.

Centro A, intervallo AB (a) describatur circulus FCB; & (a) Per p^{te} centro B, intervallo eodem BA describatur circulus ACL, *Eucl. 3.* priorem secans in puncto C, ex quo ducantur rectæ, CA, CB.

Dico triangulum ACB factum esse æquilaterum. Nam recta AC est (b) æqualis rectæ AB, cum sint ejusdem circuli FCB semidiametri; & recta BC etiam æqualis est ei- (b) Per def. dem rectæ BA, cum ambæ sint semidiametri circuli LCA. Ergo AC, BC (c) sunt æquales inter se: ac proinde omnia (c) Per axio, latera trianguli sunt æqualia. Ergo triangulum (d) ACB & æquilaterum est, & super data recta AB constitutum, quod (d) Per def. erat faciendum. 25.

Corollarium. Hinc lineam inaccessam AB metiri licet. Fig. 77. Triangulum enim æquilaterum quodcunque BDE ad punctum B secundum lineam BA supponatur adjectum. A puncto B per lineam BE, tanquam dioptram, puncta quæcunque in recta BC posita observentur. Removeatur deinde triangulum BDE

secundum lineam BC hac illac donec collimando per latus trianguli ED sive CF punctum A inaccessum in eadem linea producta positum cernatur. Erit tum triangulum BAC aequale BDE aequilaterum. Si itaque lineam accessibilem BC metiamur, linea etiam inaccessa AB mensuram habemus. Q.E.I.

PROPOSITIO II.

Fig. 24.

AD datum punctum (A) data recta (EF) aequalem ponere.

- (a) Postul. 3. Accipe circino (a) intervallum EF, & transfer ex A in D, erit recta AD par datæ EF.

PROPOSITIO III.

Fig. 24.

Datis duabus rectis inequalibus, de maiore (GH) minori (EF) parem auferre (GI.)

- (b) Postul. 3. Accipe circino (b) intervallum minoris datæ EF, & transfer in maiorem ex G in I.

PROPOSITIO IV.

Fig. 25.

Si duorum triangulorum (X, Z) latus unum (BA) uni (FL) & alterum (CA) alteri (IL) sit aequale, angulique (A & L) ab illis lateribus facti, etiam sint aequales; equabuntur etiam & bases (BC, FI) & tota triangula (X, Z) & reliqui ad basim anguli (B, F & C, I) qui lateribus aequalibus opponuntur.

(c) Per aux.
8.

Nam si intelligamus triangulum Z triangulo X superponi, latera LF, LI perfecte congruent (c) sibi aequalibus lateribus AB, AC, sic ut puncta tria L, F, I, cadant super tria puncta A, B, C. Ergo tum etiam basis FI tota cadet supra totam basim BC. Sed & anguli F, B, itemque I, C, totaque triangula sibi mutuo tunc congruent. Omnia igitur per 7. ax. aequalia sunt. Quod erat demonstrandum.

Fig. 78.

Coroll. (1.) Hinc etiam alia ratione lineam inaccessam AB metiri licet. A puncto enim quocunque C observetur Angulus ACB, & mensurentur linea AC, BC; & in plano quocunque accessibili circa angulum F angulo C aequalem, mensurentur linea FD & FE lineis AC & BC respective aequales. Erit

tum

tum linea accessibilis DE aequalis lineæ inaccessæ AB. Q.E.I.

Coroll. (2.) Hinc etiam qui sphaerulis eburneis ludunt, pilam adversariam reperiendo amovere discant. Sit sphaerularum altera impellenda B, altera qua impellenda est A; Latus vero Fig. 79, rectilineare CD. Esto linea BE linea CD perpendicularis, & sit DE aequalis BD. Si pila secundum rectam AFE impellatur ad punctum F ita reflectetur ut post reflectionem ad B tendat. In triangulis enim BFD EFD Latus FD est utrique commune, & Latus DB lateri DE æquale, & anguli ad D æquales sive recti. Tota itaque triangula æquantur: & proinde angulus BFD angulo DFE sive ad versicem opposito * Per 13. l. 1. AFC æqualis. Angulus autem AFC est angulus incidentiæ, & Angulus BFD angulus reflectionis: qui cum in omnibus reflectionibus sibi invicem æquantur, liquet pilam A versus E tendentem ad pilam B post reflectionem pergere, eamque impellere debere. Q.E.D.

Scholium.

Simili fere ratiocinio, theorema sequens, cujus mox erit Fig. 15, usus, licebit demonstrare.

Si duorum triangulorum X, Z, latera BC, FI æqualia fuerint, & anguli illis lateribus adjacentes, nimirum B & C ipsis F, & I fuerint æquales, omnia reliqua, & triangula ipsa, æqualia erunt.

Quoniam enim anguli B & C æquantur angulis F & I, si latus FI imponas lateri sibi æquali BC, illi (a) congruet. (a) Per axio. Tum vero ob æqualitatem angulorum F, B, & I, C, etiam 8. (b) FL cadet supra BA, & IL supra CA. Ergo etiam (b) Per axio. punctum L incidet in punctum A; (si enim caderet extra 8. A, latera FL, IL non inciderent in latera BA, CA.) Ergo omnia sunt per axiomā 7. æqualia.

PROPOSITIO V.

Trianguli Isoscelis seu æquicruris ad basim anguli Fig. 16, (A, C) æquales sunt.

Intelligatur triangulum ABC bis positum; sed situ converso. cba. Quoniam igitur in duobus triangulis ABC, cba, ex hypothese æquale est latus AB, lateri cb, & latus CB lateri ab, & angulus B angulo b; etiam (c) ab basim angulus A (c) Per 4. l. 1. angulo c æqualis erit. Quod erat demonstrandum. Idem enim sunt anguli C & c.

Corollarium.

Æquilaterum ergo triangulum, etiam æquiangulum est.

PROPOSITIO VI.

Fig. 26.

SI in triangulo (ABC) duo anguli (A & C) æquales fuerim, etiam latera (AB , BC) iis opposita, æqualia erunt.

Intelligatur triangulum ABC bis positum, sed situ converso cba . Quoniam igitur in duobus triangulis ABC , cba æquatur latus unum AC uni lateri ca , & angulus A angulo (a) Per Schol. c , & angulus C angulo a ; etiam reliqua omnia (a) erunt æqualia, ac proinde latus AB æquabitur lateri cb ; quod erat demonstrandum. Eadem enim sunt lineæ CB & cb .
 prop. 4.

Corollarium.

Æquiangulum ergo triangulum, etiam æquilaterum est.

Fig. 80.

Coroll. (2.) Hinc turris aut puncti cujuscvis elevati altitudinem, umbra Solaris ope, metiri licet. Ubi enim Sol gradus 45. supra horizontem elevatur, erunt turrium umbra in horizontem projecta, earum altitudini exacte æquales. Ob angulum enim
 * Per Coroll. ACB semirectum, erit & angulus BAC * semirectus: atque
 11. post p. 32. adeo, vi hujusce propositionis, linea AB linea BC æqualis. Data itaque mensurando BC , datur etiam AB Turris altitudo supra horizontem. Q.E.I.

Coroll. (3.) Idem & absque Sole, ope quadrantis astronomici invenire licet. Ubi enim elevationis angulus ACB est semirectus, ibi altitudo turris supra observatoris oculum est ejusdem oculi à media turre distantia omnino æqualis. Data itaque mensurando distantia oculi à turre datur una & turris altitudo eidem æqualis. Q.E.I.

PROPOSITIO VII.

EST propter 8. qua sine illa seorsim proposita demonstrabitur.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

SI duo triangula (X, Z) habuerint omnia latera sibi *Fig. 27.*
mutuo equalia (AC ipsi EF ; CB ipsi FI ; AB
ipsi EI ;) etiam angulos omnes aequalibus lateribus
oppositos habebunt aequales (C ipsi F ; A ipsi E ; B
ipsi I .).

Ponatur enim latus AB supra sibi æquale EI . Tum vero
punctum C , vel incidet in punctum F vel non. Si incidat in
 F , tota triangula congruent, ac proinde omnes anguli (a) æ- (a) *Per axio-*
quales erunt. Cadet vero punctum C in punctum F . Nam 7.

A centro E semidiametro EF describatur circulus; & à cen- *Fig. 31.*
tro I semidiametro IF describatur circulus. Punctum C ob
latera equalia erit in circuli utriusque circumferentia, atque ideo
in utriusque circumferentia communi intersectione E . Q.E.D.

Si C cadat extra B , ducatur FC . Quoniam per hypothe- *Fig. 28.*
sim latera EF , AC æquantur, erit (b) angulus EFC par an- (b) *Per 5. L. 1.*
gulo ECF . Ergo IFC major erit quam ECF . Ergo IFC
multo major erit quam ICF . Rursum, quia per hypothe-
sim IF , BC æquantur, erit IFC (c) par ICF . Ergo IFC (c) *Per 5. L. 1.*
& multo major est quam ICF , & æqualis, quod est impos-
sibile. Ergo C non cadit extra F . Ergo, &c.

Plures casus, quos hoc theorema admittit, consulto præ-
termisi, ne tyrones fatigarem. Neque vero difficulter eorum
demonstratio ex demonstratione jam posita elicitur.

PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilineum (IAL) bifariam *Fig. 29.*
secare.

Ex lateribus anguli accipe circino æquales AB , AC ; cen-
tris B ac C describe duos æquales circulos se secantes in F ,
ducaturque recta FA . Hæc angulum bifecabit.

Ducantur enim BF , CF ; triangula FAB , FAC sunt sibi
mutuo æquilatera; nam latera AB , AC ex constitutione æ-
qualia sunt, & latera BF , CF , quia æqualium circulorum
semidiametri, etiam æquantur; & AF utrique triangulo com-
mune est. Ergo anguli BAF , CAF (d) æquales sunt. Bi- (d) *Per 8. L. 1.*
sectus est ergo datus angulus IAL , quod erat faciendum.

Corol-

Corollarium.

Hinc patet quomodo angulus secari possit in æquales angulos 4. 8. 16. &c. singulas nimirum partes iterum bisecando.

Scholium.

Methodum secandi angulos in æquales quotcunque, circino & regula hætenus nemo docuit.

Ex Pappo tamen & Archimede habemus curvas quasdam lineas, quadratricem videlicet & spiralem, quarum adminiculo id obtinetur. Anguli trisectio perficitur a Pappo l. 4. prop. 31. præsidio hyperboles, quod etiam obtineri potest ope parabolæ, vel conchoidis.

Fig. 30.

Mechanice datum angulum in quotcunque secabis æquales angulos, si ex anguli vertice A tanquam centro intra anguli crura arcum describas, eumque divides in quot placuerit æquas partes; rectæ enim ex A per divisionum puncta emissæ, angulum secabunt in partes totidem æquales.

PROPOSITIO X.

Fig. 31.

Datam rectam finitam (AB) secare bisariam.

(a) *per 1. l. 1.* Super data AB fac triangulum æquilaterum (a) AGB .
(b) *Per præced.* Angulum ejus G (b) biseca per rectam GC . Eadem bisecabit rectam AB datam.

Nam in triangulis X , Z , latus CG est commune, & per constructionem GB , GA æqualia, angulique iis contenti AGC , BGC æquales. Ergo bases AC , BC (c) æquantur.
(c) *Per 4. l. 1.* Bisecta est ergo data AB . Quod erat faciendum.

Pro praxi satis erit centris A & B duos æquales circulos describere, se secantes in G & L , ac ducere rectam GL .

PROPOSITIO XI.

Fig. 32.

Ex dato puncto (A) in data recta (LI) perpendicularem excitare.

Circino cape æquales AC , AF . Centris C & F describe duos æquales circulos se secantes in B . Ex B ad A ducta recta erit perpendicularis.

Ducan-

Ducantur enim CB, FB. Triangula X & Z sibi mutuo æquilatera sunt. Ergo anguli CAB, FAB (a) æquales. Er- (a) Per 8. l. 1.
go BA (b) perpendicularis est. Ex dato igitur puncto, &c. (b) Per defn.
Quod erat faciendum. 14.

Praxis tam hujus quam sequentis expeditur facillime præsidio normæ.

PROPOSITIO XII.

EX dato extra rectam infinitam (LQ) puncto Fig. 33.
(A) perpendicularem ducere.

Centro A describe circulum, qui secet datam LQ in C & I. Rectam CI biseca (c) recta AB. Ea erit perpendi- (c) Per 10. l. 1.
cularis.

Ducantur enim AC, AI. Quoniam per constructionem triangula X & Z sunt mutuo æquilatera; erunt anguli (d) (d) Per 8. l. 1.
CBA, IBA æquales. Ergo AB perpendicularis (e) est. Ex (e) Per def.
dato igitur puncto, &c. Quod erat faciendum. 14.

PROPOSITIO XIII.

Recta (BA) super rectam (CF) consistens aut Fig. 34.
duos rectos angulos facit, aut duobus rectis
æquales.

Nam si BA insistat perpendiculariter, erunt per def. 14.
anguli BAC, BAF utrimque recti. Si vero BA insistat ob-
lique, excitetur (f) perpendicularis AL. Quia tum anguli (f) Per 11.
inæquales CAB, FAB eundem locum occupant, quem duo l. 1.
recti CAL, LAF, ac proinde iis congruunt, erunt (g) his (g) Per axio.
illi æquales. Quod erat demonstrandum. 7.

Corollaria.

1. **E**odem modo demonstrabitur, si plures rectæ quam una,
eidem rectæ insistant, angulos effici duobus rectis
æquales.

2. Duz rectæ invicem secantes BAC, FAL efficiunt an- Fig. 37.
gulos, quatuor rectis æquales. Patet ex propos.

3. Omnes anguli circa unum punctum constituti, confi- Fig. 36.
ciunt quatuor rectos. Patet ex Corol. 2. sunt enim quatuor
recti in plures partes secti.

4. [Cognito angulo CAF, cognoscitur una ejusdem comple- Fig. 37.
mentum ad duos rectos BAF. Sit e. g. Angulus CAF gra-
dum]

duum 70: erit angulus BAF graduum 110. Numeri enim isti simul additi, gradus 180, angulorum rectorum duorum mensuram, consciunt.]

PROPOSITIO XIV.

Fig. 35.

SI duae rectae (XR, ZR) ad idem utrimque punctum recta QR faciant angulos (XRQ, ZRQ) duobus rectis aequales; (XR, ZR) unam rectam efficiunt.

(a) Per 13.
L. 1.
(b) Contra
axio. 9.

Si negas, faciant XR, BR unam rectam. Ergo anguli XRQ, QRB (a) confluent duos rectos, quod (b) est absurdum, cum ex hyp. XRQ, QRZ duos rectos efficiant.

PROPOSITIO XV.

Fig. 37.

SI duae rectae (BC, FL) se secuerint in (A), erunt anguli ad verticem (A) oppositi, aequales.

Nimirum LAB ipsi CAF , & BAF ipsi LAC . Nam quia BA insistit rectae LF , erunt LAB, FAB (c) pares duobus rectis. Et quia FA insistit rectae BC , erunt (d) quoque FAC, FAB pares duobus rectis. Ergo (e) duo simul LAB, FAB æquantur duobus simul CAF, FAB . Ab-
(c) Per 13.
L. 1.
(d) Per eand.
(e) Per axio.
(f) Per axio.
lato igitur communi FAB , remanent (f) æquales LAB, CAF . Eodem modo ostendam æquales esse BAF, LAC .

Coroll. Ex his duabus propositionibus in Catoptrica colligimus lucis radium, inter reflectendum per angulum reflectionis angulo incidentia æqualem tendentem, viam omnium brevissimam eligere. E.G. Ubi anguli BED, AEF æquantur; linea AE & EB simul sumpta, lineis quibuscumque, puta AF & FB simul sumtis sunt breviores. A puncto enim B demittatur linea perpendicularis BC : & sint BD & CD æquales: ducantur etiam EC & FC . In triangulis BED & CED , cum latus DE sit utrique commune, & latus BD lateri DC ex hypothese æquale, Angulus etiam BDE angulo CDE æqualis; * æquabuntur reliqua omnia; eritque BE æqualis CE : angulusque BED angulo DEC æqualis. (Ob angulum enim DEC æqualem Angulo [BED , hoc est] AEF , linea AE, EC unam rectam efficiunt.) Et eodem prorsus modo linea BF æqualis probabitur linea CF . Cum ergo linea BE & EA simul sumpta, linea CA æquantur: & linea BF, FA simul sumpta, lineis CF, FA simul sumptis æquantur, liquet CA unum tri-
* Per 4. L. 1.
† Per 20. L. 1.
anguli ACF latus, † reliquis duobus CF & FA minus esse.
Q.E.D.

Fig. 82.

PRO-

PROPOSITIO XVI. XVII.

Continentur in prop. 32. Neque ante illam adhibentur.

PROPOSITIO XVIII.

IN omni triangulo angulus (*A*) major est, qui Fig. 38.
majori lateri (*BO*) opponitur: (*B*) minor, qui
minori (*AO*).

Nequit *A* esse par *B*, alias (*a*) latera *BO*, *AO* æquarentur (*a*) Per 6. 4. 1. tur, contra hypothesim. Nequit etiam *A* minor esse quam *B*. Nam si *A* minor est, *B* major, poterit intra angulum *B* per rectam *BF* fieri angulus *ABF* æqualis *A*. Tum vero per 6. æquales erunt *BF*, *AF*, & si addas utrique *OF*, erunt *BF*, *FO* æquales *AO*. Sed *AO* per hyp. minor est quam *BO*. Ergo etiam *BF*, *FO* minores sunt quam *BO*, quod repugnat definitioni lineæ rectæ, quæ est omnium brevissima. Angulus igitur *A* nec minor est angulo *B*, nec æqualis. Ergo major; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

IN triangulo latus (*BO*) majus est, quod oppo- Fig. 38.
nitur majori (*A*) angulo: (*AO*) minus, quod
minori.

Est conversa prioris. *BO* non est minus quam *AO*, alias per 18. angulus *A* esset minor angulo *B* contra hyp. Neque etiam *BO* æquale est *AO*, alias per 5. anguli *A*, *B* æquarentur, rursus contra hyp. Ergo *BO* majus est quam *AO*. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Hinc colligimus globum perfecte politum in Fig. 33. plano horizontali perfecte polito quiescere non posse, nisi ubi Terram tangit. E. G. Sit linea *AB* planum horizontale, *C* terra centrum, *CA* terra semidiameter tangenti *AB* perpendicularis. Globus ad *B* positus ob gravitatem suam, & plani declivitatem descendet versus *A*. In triangulo enim *CAB*, linea perpendicularis *CA* acuto angulo *CBA* opposita, minor est linea *BC* angulo recto *ABC* opposita: atque adeo descensus perpetuus est a *B* ad *A* in quo corpus non potest quiescere. Neque aliter fluidorum descensum, atque in superficiem sphericam conformacionem probamus.

PRO

PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli duo qualibet latera reliquo sunt majora.

Est Archimedi instar axiomatis; immediate siquidem patet ex definitione Archimedea linear rectar, quam vide supra in definitionibus.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 39.

Si a terminis unius lateris (AB) intra triangulum due recte junguntur (AO, BO) ha lateribus trianguli (AC, BC) minores sunt, majorem vero angulum (AOB) comprehendunt.

(a) Per 20.
L. 1.

1. Pars. Produc AO in F . AC, CF sunt (a) majores quam AF . Addita ergo communi FB , erunt AC, BC majores quam AF, FB . Rursum OF, BF sunt (b) majores quam OB . Addita ergo communi AO , erunt AF, FB majores quam AO, OB . Ergo AC, CB sunt multo majores, quam AO, OB .

(b) Per eand.

2. Pars demonstrabitur in Coroll. 2. partis primæ prop. 32. Ea interim non utemur.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 40.

Ex datis tribus rectis (BO, LB, LO) quarum due qualibet reliqua sint majores, triangulum constituere.

Affumatur datarum una BL , atque una ejus extremitate B accepta pro centro, intervallo alterius datæ BO describatur arcus.

Deinde accepta pro centro extremitate altera L , intervallo tertie LO describatur arcus priorem secans in O : ducanturque rectæ BO, LO . Dico factum.

Demonstratio patet ex constructione.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 40.

Ad datum in recta punctum (B) angulum efficere equalem dato (A)

Du-

Ducatur utcumque CF secans latera dati anguli A . In data recta ex B accipe BL parem AF . Centro B intervallo AC describe circulum: item alium centro L intervallo FC qui priorem secet in O . Ex O ad B & L duc rectas.

Erit angulus LBO par dato A .

Nam per constr. triangula sibi mutuo sunt æquilatera. Ergo per 8. anguli B & A æquales.

Scholium.

IN gratiam tyronum visum est hic nonnulla ad praxim angulorum necessaria proponere.

Anguli mensura est circuli peripheria, quæ ex A vertice Fig. 41. anguli tanquam centro describitur, ut patebit ex prop. ultima lib. 6.

Itaque quot gradus continebit arcus BC inter anguli BAC crura interceptus, tot graduum dicetur esse angulus BAC . Et quoniam rectum angulum BAF metitur quadrans peripheriæ BF , gradus 90. continens, dicetur rectus angulus esse graduum 90. Similiter quia duos rectos mensurat dimidia circumferentia in 180. gradus secta, & quatuor rectos circumferentia tota secta in gradus 360. dicentur duo recti efficere gradus 180. & quatuor recti gradus 360. His prænotatis, praxes angulorum sunt,

1. Ad datum in recta punctum B angulum statuere parem Fig. 42. dato A . Ex A dati anguli vertice tanquam centro inter latera arcum describe CF . Centro B puncto dato, describe eodem intervallo arcum LZ : ex quo aufer LO parem CF . Per B & O duc rectam: erit LBO par dato A .

2. Dati anguli OPQ gradus examinare. Fit hoc facillime per semicirculum corneum transparentem, in 180. gradus divisum. Centrum semicirculi pone supra P verticem anguli, & semicirculi radium PL supra anguli latus PQ . Arcus LO inter anguli crura interceptus ostendet, quot graduum sit datus angulus. Fig. 43

3. Angulum construere datos continentem gradus, ut 42. Fig. 43. Duc rectam XQ in qua signa punctum P . Super P pone semicirculi centrum, ejusque semidiametrum PL supra PQ . Ab L numera gradus 42. usque in O . Per O ex P ducta recta dabit angulum OPL graduum 42.

Horum omnium demonstratio pendet ex ultima prop. lib. 6.

PROPOSITIO XXIV. & XXV.

Fig. 44.

SI duo triangula (BAC, BAF) duo latera (BA, AC) duobus (BA, AF) alterum alteri, equalia habuerint; unum vero triangulum angulum illis lateribus contentum (BAF) majorem habeat altero (BAC ;) habebit quoque basim BF majorem basi (BC .)

Et si basim majorem habuerit, habebit angulum majorem.

Centro A describe per C circulum; is transibit per F , quia AC, AF ponuntur æquales. Ergo BF cadit supra C . [hoc est inter punctum A & punctum C .] Junge CF . Angulus BCF est major angulo ACF , hoc est per 5. angulo AFC , hoc est multo major angulo BFC . Ergo [In tri-
(a) Per 19. LI. angulo BCF] (a) BF opposita majori angulo BCF major est quam BC opposita minori BFC .

2. Pars patet ex prima parte & ex prop. 4.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 25.

SI duo triangula (X, Z) duos angulos duobus æquales habuerint, alterum alteri, (B ipsi F & C ipsi I ;) & unum latus uni lateri æquale, vel quod inter æquales angulos existit (ut BC, FI ;) vel quod uni æqualium angulorum opponitur (ut AC, LI ;) reliqua omnia erunt equalia.

Ponantur primo æqualia esse latera BC, FI , inter æquales angulos posita: tum vero reliqua etiam omnia æqualia esse demonstratum est in scholio prop. 4.

Ponantur deinde latera AC, LI æqualibus angulis B & F opposita esse æqualia. Quia anguli B, C per hyp. æquantur angulis F, I , etiam reliqui A, L æquales erunt per coroll. 9. p. 32. quæ ab hac non dependet. Ergo per primam partem omnia reliqua sunt æqualia.

Fig. 34.

Corollarium. Hinc quoque, Thaletem secuti, distantias inaccessibleis metiri discimus. E. G. Sit AD linea inaccessibleis: cui ad punctum A erigatur perpendicularis AC . Fias Angulus ACB angulo ACD equalis. Linea AB accessibilis, erit linea AD inaccessibleis, equalis. Q. E. I.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

SI duas rectas (AB , CF) parallelas secuerit *Fig. 45*
 recta GO : erunt 1. *a*equales alterni anguli
 (RLO , QOL , item BLO , COL) 2. *b*externus
 (GLB) *c*equalis interno ad eandem partem (LOF ;
 (item GLR ipsi LOC .) 3. Duo ad eandem par-
 tem interni simul (ALO , COL) *d*equales duobus
 rectis: item duo BLO , FOL duobus rectis *e*-
 quales.

1. Pars. Ex O & L duc perpendiculares OR , LQ . Erunt *Fig. 46*.
 (*a*) hæc ad utramque parallelam AB , CF perpendiculares, & (*a*) Per *axioma*
 per def. 36. inter se æquales. Æquales quoque (*b*) ex paral-^{11.}
 lelis auferent partes RL , QO . Ergo triangula, X , Z , sibi (*b*) Per *axioma*
 mutuo æquilatera sunt. Ergo (*c*) anguli RLO , QOL al-^{12.} (*c*) Per 8. l. 1.
 terni æqualibus lateribus RO , QL oppositi, sunt æquales.
 Quod erat primum. Ex quò patet etiam alternos reliquos
 BLO , COL æquales esse. Nam quia tam BLO , ALO ,
 quam COL , FOL æquantur (*d*) duobus rectis; erunt BLO , (*d*) Per 13.
 ALO æquales ipsis COL , FOL . Ablatis ergo æqualibus ^{l. 1.}
 RLO , FOL , erunt reliqui BLO , COL etiam æquales.

2. Pars. GLB æquatur ad verticem (*e*) oppositò RLO . (*e*) Per 15.
 Sed RLO æquatur per 1. partem LOF . Ergo GLB exter-^{l. 1.}
 nus æquatur interno LOF ; quod erat alterum.

3. Pars. ALO per 1. partem æquatur FOL . Atqui FOL
 cum COL (*f*) facit duos rectos. Ergo etiam ALO cum (*f*) Per 13.
 COL facit duos rectos. Quod erat tertium. ^{l. 1.}

Coroll. Hinc, Eratosthenem imitati, Telluris ambitum metiri
 discimus. Ille enim observavit Solem Siene, urbi Ægyptiaca.
 ipso solstitii astivi die perpendiculariter impendere: & eodem
 die gnomonis ope invenit Solem ab Alexandria, urbis etiam
 Ægyptiaca, sub eodem fere meridiano sita, vertice gradus fere
 septem cum quinta gradus parte distare: atque urbes istas stadia
 5000 circiter distare novit. Unde vi presentis propositionis ambi-
 tum terra hoc modo definivit. Sit A Siene; B Alexandria, ubi *Fig. 85*.
 gnomon BC erigitur horizonti perpendicularis: Sint DF & EG
 radii Solares sibi invicem quoad sensum paralleli; DA radius
 horizonti Siensens perpendicularis, per centrum terra transiens;
 EG vero radius horizonti Alexandrino obliquus, per gnomonis
 apicem transiens, & cum gnomone angulum GCF graduum $7\frac{1}{2}$
 continens. Cum vero angulus GCF æqualis sit angulo alterno
 C AFB ,

AFB, cujus mensura est arcus AB graduum $7\frac{1}{3}$; Telluris ambitum hac analogia invenit: Ut se habent gradus $7\frac{1}{3}$ ad stadia 5000; Ita integer circulus graduum 360 se habebit ad 250000; ambitum telluris iisdem stadiis definiendum. Q.E.I.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 47.

SI duas rectas (*AB, CF*) secans recta (*GO*) alternos angulos (*ALO, FOL*) aequales fecerit, erunt (*AB, CF*) parallelae.

Si negas, fit ergo alia *XLZ* per punctum *L* ad *CF* parallela.

(g) Per prec.

Ergo (g) angulus *XLO* par est alterno *FOL*; Quod fieri non potest, cum per hyp. *ALO* par sit eidem *FOL*.

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 45.

Fig. 46.

SI duas rectas (*AB, CF*) secans recta (*GO*) fecerit externum (*GLB*) aequalem opposito interno (*LOF*) vel duos ad easdem partes internos *ALO, COL* pares duobus rectis, erunt (*AB, CF*) parallelae.

Per 15. *GLB* æquatur *ALO* opposito ad verticem. Sed per hyp. *GLB* æquatur *LOF*. Ergo etiam *ALO* æquatur sibi alterno *LOF*. Ergo (a) *AB, CF* sunt parallelae.

(a) Per prec. ced.

Deinde *COL* cum *FOL* facit duos rectos. Sed per hyp. idem *COL* etiam cum *ALO* facit duos rectos. Ergo *ALO, FOL* alterni æquales sunt. Ergo rursus *AB, CF* (b) sunt parallelae.

(b) Per prec.

Corollarium.

EX secunda parte patet omne rectangulum esse parallelogrammum.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 45.

SI due recte (*AB, CF*) sint parallelae ad eandem rectam (*DN*), erunt inter se parallelae.

Patet

Patet per se, & ex precedentibus. Nam si omnes secen-
tur a recta GO, erit (a) angulus externus GLB par interno (a) Per 27.
LDN. est vero LDN externus (b) respectu DOF, ac pro-
inde æqualis. Ergo etiam GLB par est LOF. Ergo AB, (b) Per 27.
CF sunt (c) parallelæ. (c) Per 27.

PROPOSITIO XXXI.

PER datum punctum (A) parallelam ducere ad Fig. 48,
rectam datam (CF.)

Ex A ducatur utcumque AL, secans datam FC. Ad
punctum A fiat (d) angulus LAS par angulo ALF. Erit (d) Per 23.
AS parallela ad CF, ut patet ex 28. cum alterni anguli SAL, l. 1.
FLA sint æquales.

Praxis: ducta AL, centro L describe arcum IQ, & cen-
tro A eodem intervallo arcum OX; ex quo aufer OB parem
IQ. Per A & B ducta recta erit parallela.

Demonstratio pendet ex 29. l. 3.

Aliter. Centro quopiam P describe circulum qui transeat Fig. 49.
per datum punctum A, & secet datam CF in Q, & O. Ar-
cui QA accipe æqualem ON. Recta AN erit parallela.

Demonstratio pendet ex 29. lib. 3. & ex 28. hujus.

Solutum.

Demonstrata jam igitur est parallelarum theoria indepen-
denter ab axiomate, quod Euclides, ejusque interpretes
assumunt minus recte; cum non sit axioma, sed theorema,
cujus veritas non magis per se appareat, quam ipsius 29. pro-
positionis. Quia tamen deinceps sapius adhibebitur, id hoc
loco jam facile ex præmissis demonstrabimus.

Theorema.

SI recta (MA) incidens in rectas (BC, AD) faciat angulos Fig. 50,
internos ad easdem partes (BAD, ABC) duobus rectis
minores, rectæ (BC, AD) concurrent versus eam partem,
quam spectant anguli duobus rectis minores.

Quoniam per hyp. CBA, DAB duobus rectis sunt mi-
nores; fiant CBA, XAB duobus rectis æquales: Eruntque
BC, AX (e) parallelæ. Assumo tanquam axioma per se no- (e) Per 29,
tum, inter rectas AD, AX in infinitum productas duci pos-
se aliquam ad AM parallelam, puta ZX, quæ major sit quam
AB. Accipiat ipsi ZX æqualis AR, & junge ZR. Quo-
niam

- (a) *Per 27.* niam AR, ZX sunt parallelæ, erunt (a) alterni XZA, RAZ æquales. Sunt autem & latera XZ, ZA æqualia lateribus RA, AZ per constr. Ergo etiam (b) anguli RZA, XAZ æquales sunt. Ergo RZ est (c) parallela ad AX. Sed etiam BC est parallela ad AX. Ergo RZ & BC sunt (d) parallelæ. Est igitur BC & parallela ad RZ, & inclusa triangulo ARZ. Ergo cum produci in infinitum possit, necessario occurreret aliquando rectæ AZ. Nam neque evadere potest per sibi parallelam RZ, neque pertingere in A, alias duæ rectæ haberent commune segmentum. Liqueat ergo propositum.

Demonstratio Clavii est a parallelis independens, sed prolixissima & multum operosa: Procli nititur hoc principio, quod recta unam parallelam secans, etiam alteram sectura sit, si producat. Verum hoc per se notum non est, ob rationem datam ad def. 36.

Corollarium.

Fig. 50.

- H**inc patet rectas non parallelas concurrere, de quo dubitari poterat ab rationem allatam ad def. 36. Sint rectæ non parallelæ BC, AZ. Duc AX parallelam ad BC; erunt XAB, CBA duobus rectis (e) æquales. Ergo ZAB, CBA sunt duobus rectis minores. Ergo per theorema jam demonstratum BC, AZ concurrunt.

PROPOSITIO XXXII.

PARS I.

Fig. 51.

Omnis trianguli externus quivis angulus (FBC) duobus internis oppositis (A & C) æqualis est.

- (f) *Per 31.* Per B duc (f) BL parallelam ad AC. Quia duas parallelas BL, AC secat FA, erit externus angulus FBL interno A (g) æqualis. Et quia easdem parallelas BL, AC secat etiam recta BC, erit LBC sibi alterno C (h) æqualis. Ergo totus FBC æquatur utrique simul A & C. Quod erat demonstrandum.

Corollaria.

Fig. 51.

1. **E**xternus angulus (FBC) quolibet interiorum oppositorum A vel C, major est.

Fig. 39.

2. Angulorum (C & AOB) eandem basim (AB) habentium, major est (AOB) qui intra cadit.

Pro-

Producatur enim AO in F. AOB per hanc major est quam OFB; & OFB per hanc eandem major est quam C. Ergo AOB multo maior est quam C.

3. Si ab uno puncto (A) in unam rectam (BC) incidant Fig. 55. duæ rectæ, altera (AO) oblique, perpendiculariter vero altera (AF); hæc cadet versus partes acuti anguli AOB. Cadat enim, si fieri potest, versus obtusum AOC, puta in Q. Igitur acutus AOB erit externus, respectu recti AQB, ac proinde illo major per coroll. 1. quod est absurdum.

PROPOSITIO XXXII.]

PARS II.

OMnis trianguli tres simul anguli, duobus rectis sunt æquales.

Ac proinde conficiunt gradus 180.

Produc unum latus AB in F. Externus angulus FBC Fig. 52. duobus internis oppositis A & C æqualis (a) est. Atqui (b) (a) Per 1. partem hujus. FBC cum CBA efficit duos rectos. Ergo etiam duo A & C cum eodem CBA efficiunt duos rectos. Quod erat demonstrandum. (b) Per 13. l. 1.

Aliter. Ducatur HM parallela lateri AC. Anguli alterni Fig. 53. tam O, A, quam N, C æquales (c) sunt. Sed O, Q, N conficiunt (d) duos rectos. Ergo etiam A, C, Q duos rectos conficiunt: quod erat demonstrandum. (c) Per 27. l. 2. (d) Coroll. 1. p. 13. l. 1.

Corollaria.

4. **T**Res simul anguli cujuscvis trianguli æquales sunt tribus simul cujuscunque alterius.

5. Si in triangulo unus rectus [aut obliquus] est, reliqui sunt acuti.

6. Si in triangulo unus est rectus, reliqui duo simul etiam unum rectum conficiunt.

7. In triangulo angulus, qui æquatur duobus reliquis, rectus est.

8. Cum scitur quot graduum sit unus angulus, scitur etiam quot gradus faciant duo reliqui simul. Et cum scitur quot gradus faciant duo anguli, aut eorum summa, scitur etiam quot gradus efficiat tertius.

9. Cum in uno triangulo duo anguli aut singuli aut simul, æquales sunt duobus angulis aut singulis aut simul in altero triangulo; etiam tertius tertio æqualis erit.

10. Cum duo triangula unum angulum aequalem habent, etiam reliquorum summæ æquantur.

11. Cum in Isoscele angulus æquis cruribus contentus est rectus, reliqui ad basim sunt semirecti. Et Isoscelis ad basim anguli semper sunt acuti.

12. Trianguli æquilateri angulus facit duas tertias unius recti. Facit enim tertiam partem duorum rectorum. Ergo duas tertias unius.

Fig. 54.

13. Hinc anguli recti (BAC) facillima trisectio; si super AC fiat triangulum æquilaterum Z. Nam cum FAC sint duæ tertie unius recti, erit BAF recti una tertia.

Fig. 55.

14. Perpendicularis (AF) est brevissima omnium quæ ex puncto (A) ad rectam aliquam duci possunt. Quoniam enim angulus F rectus est, erit per coroll. 5. AOF acutus. Ergo

(a) Per 19.
l. 1.

(a) AF minor quam AO quælibet.

15. Ex uno puncto ad unam rectam tantum una perpendicularis cadit. Patet ex coroll. præced.

Fig. 86.

16. Hinc etiam astrorum parallaxin sive loci veri æquis visi differentiam definire discimus. Sit A Telluris centrum; B Loc. Observatoris in ejusdem superficie. Sit DBG angulus astri G à vertice per observationem notus; sive distantia angularis astri à vertice visa. Est vero Angulus DAC distantia angularis vera. Angulus autem externus observatione detectus DBG angulis BAC & BCA æqualis est. Atque adeo angulus BCA angularum DBG & DAC differentia. Si itaque ex tabulis Astronomicis distantiam astri A vertice tempore observationis DAC queramus, quando angulus DBG quadrantis ope innotescit, differentia angularum istorum BCA, quam Parallaxin dicimus, pariter innotescet. Q.E.D.

Scholium.

Hujus pulcherrimi, fecundissimique theorematibus, cujus per Mathematicam universam usus prope immensus, inventor est Pythagoras teste Eudemo veteri Geometra. Frequentissime ejusdem meminit Aristoteles, qui illud etiam exemplum statuit perfectissimæ demonstrationis. Sed quemadmodum ex hac propositione jam didicimus, quot rectis angulis, quos anguli æquivalent, ita ejusdem beneficio cujuslibet figure rectilinearis sive interni, sive externi anguli, quot rectos conficiant, præclare innotescet tribus sequentibus theorematibus.

Theorema I.

Fig. 56.

Omnis quadranguli quatuor simul anguli efficiunt quatuor rectos.

Nam

Nam si per oppositos angulos ducas rectam BF, hæc quadrangulum in duo triangu-
la secabit, quorum anguli simul
conficiunt (a) rectos quatuor.

(a) *Per 32.*
l. 1.

Theorema 2.

OMnes simul anguli cujuscunque figuræ rectilinearæ con- *Fig. 57.*
ficiunt bis tot rectos demptis quatuor, quot sunt late-
ra figuræ.

Ex quovis puncto A intra figuram, ducantur ad omnes fi-
guræ angulos rectæ, quæ secabunt figuram in tot triangu-
la quot habet latera. Quare cum singula triangu- (b) *Per 32.*
la (a) conficiant duos rectos, omnia simul conficient bis tot rectos, quot *l. 1.*
sunt latera. Sed anguli circa punctum A, (c) conficiunt qua- (c) *Coroll. 3.*
tuor rectos. Ergo si ab omnium triangulorum angulis demas *p. 13. l. 1.*
angulos circa A, anguli reliqui, qui componunt angulos fi-
guræ, conficient bis tot rectos, demptis quatuor, quot sunt
latera figuræ.

Hinc patet omnes ejusdem speciei rectilineas figuras æ-
quales habere angulorum summas; Quod admiratione di-
gnum est.

Praxis. Duplica denominatorem figuræ: à producto aufer 4.
restabunt anguli recti, quos conficiunt anguli interni figuræ.

Theorema 3.

OMnes simul externi anguli cujuscunque figuræ rectilinearæ, *Fig. 58.*
conficiunt quatuor rectos.

Nam singuli figuræ interni anguli, cum singulis externis
conficiunt duos (d) rectos. Ergo interni simul omnes, (d) *Per 13.*
cum omnibus simul externis conficiunt bis tot rectos, quot *l. 1.*
sunt latera figuræ. Sed (ut in præced. ostendimus) interni
simul omnes etiam cum quatuor rectis, efficiunt bis tot
rectos, quot sunt latera figuræ. Ergo externi anguli, & qua-
tuor recti æquantur.

Mira sane hæc figurarum rectilinearum proprietas est:
ex qua illud etiam consequitur, omnes cujuscunque speciei
rectilineas figuras æquales habere externorum angulorum
summas. Itaque trianguli alicujus tres externi anguli æqua-
les sunt mille externis angulis figuræ millelateræ: Quæ prorsus
admiratione sunt digna.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 59.

SI duas rectas aequales & parallelas (AB, CF) jungant dua alia (AC, BF) erunt etiam illa aequales & parallele.

- Parallelas AB, CF secet AF . Erunt in triangulis Q, R
 (a) Per 27. l. 1. alterni anguli BAF, CFA (a) aequales. Ponitur autem latus AB aequale lateri CF , & AF utrique triangulo est commune. Ergo (b) bases BF, AC aequantur; (quod erat primum.) Et anguli ad basim AFB, FAC sunt aequales: ac proinde AF incidens in rectas AC, BF facit alternos AFB, FAC aequales. Ergo (c) AC, BF sunt etiam parallele. Quod erat alterum.

Fig. 87.

Corollarium. Hinc Montium tam altitudines supra horizontem, quam lineas horizontales metiri discimus. Sit ABC latus montis, cui applica ingentem normam, aut quad norma instar est, ADB . Erit AD aequalis HB , & DB aequalis AH . Applica deinde inferius a puncto B ad punctum C . Erit itidem EB aequalis CF , & EC aequalis BF ; atque ita porro. Latera horizonti parallela AD, BE , &c. simul addita, dabunt lineam horizontalem GC : & latera perpendicularia BD, EC , &c. simul addita, dabunt altitudinem AG .

Fig. 39.

[Coroll. (2.) Hinc etiam motuum compositionem aestimare discimus. Impellatur corpus ad A positum eodem temporis momento, vi AC secundum directionem lineae AC ; & vi AB secundum directionem lineae AB . Ex conjunctione virium diagonalem AF describet. Hoc enim pacto neutra virium mutatur. Corpus enim ad F , aequè distat à lineis directionum utrisque AC, AB , ac si vi alterutra sola impulsus esset, quod de nullo alio puncto dici potest. Hoc autem corollarium cum phenomenis Astronomicis aliisque Mechanicis adeo congruit, ut à Cl. Newtono tanquam Philosophia Geometrica fundamentum merito habeatur.]

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 59.

Parallelogrammi opposita latera & anguli aequantur, ipsumque à diametro bisecatur.

(d) Per def. 2.

35.

(e) Per 27.

1.

(f) Per def.

35.

(g) Per 27. l. 1.

Quoniam AB, CF sunt (d) parallele, in easque incidit AF , erunt alterni BAF, CFA (e) aequales. Item quia AC, BF sunt (f) parallele, in easque incidit AF , erunt (g) alterni CAF, BFA aequales. Ergo totus BAC toti BFC aequalis

qualis est. Eodem modo ostendam B & C æquales esse. Quod erat primum.

Quia vero jam ostendi triangula Q, R, quæ unum latus A F commune habent, etiam angulos lateri A F adjacentes habere æquales, nimirum BAF ipsi CFA, & CAF ipsi BFA. Erunt (a) etiam latera AB ipsi FC, & BF ipsi CA, æqualia, itemque ipsa triangula.

Scholium.

Partim ex hoc theoremate, partim ex definitione libro 2. Fig. 60. præmittenda, facile elicitur dimensio parallelogrammi rectanguli. Illius area producitur ex multiplicatione duorum laterum contiguorum AF, AC. Sit exem. gr. AF pedum 8. AC, 4. Duc 8. in 4. proveniunt 32. pedes quadrati pro area rectanguli.

Quadrati vero area habetur ex uno latere (FI) per se ipsum Fig. 61. multiplicato: ut si latus (FI) sit 5. pedum; duc 5. in se, proveniunt 25. pedes quadrati pro area quadrati.

Demonstratio ex hac prop. patet, ductis per laterum divisiones parallelis.

Corollarium. Hinc Geodata agri parallelogrammi aream facilius dividunt. Sit enim ABDC ager parallelogrammus; AD ejusdem diameter, sive linea diagonalis; cujus punctum medium signat F. Quacunque linea recta, ut EG, per punctum F transit, agrum in partes æquales EACG, EBDG dividit. Triangulum enim ABD æquale est triangulo ACD; & * Triangulum AEF æquale Triangulo GFD. Si itaque * Per 26. l. 1. trapezio EBDF, loco trianguli AEF triangulum eidem æquale GFD addas, Aream non mutabis: sed erit trapezium EBDG æquale triangulo ABD sive dimidio parallelogrammo, & proinde trapezio AEGC æquale. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXV. & XXXVI.

Parallelogramma super basi eadem (AB) vel a Fig. 62. quali, & inter easdem parallelas (CQ, AX) constituta, sunt æqualia.

Quia AL, BQ (b) sunt parallelæ, easque secat CQ; erit (b) Per def. (c) externus CLA par interno FQB. Deinde quia tam CF 35. quam LQ æquantur (d) eidem AB, erunt CF, LQ æqua- (c) Per 27. l. 1. (d) Per 34. l. 1. les. Adde utrisque FL; erunt totæ CL, FQ æquales. Insuper & AL, BQ (e) æquales sunt. Triangula igitur CLA, (e) Per eand. FQB æqualia (f) sunt. Ergo ablata communi FOL, plana (f) Per 4. l. 1. FOAC;

FOAC, QBOL remanent æqualia. Quibus utrisque additum planum AOB, fiunt parallelogramma tota ACFB, ALQB æqualia. Quod erat demonstrandum.

Hæc propositio fiet universalis p. 1. lib. 6. Observent hic tyrones, quamvis parallelogramma inter easdem parallelas sine fine productas in infinitam longitudinem extendantur ex eadem basi AB, semper tamen manere æqualia ex vi demonstrationis jam datæ.

[Unde sequitur duas urbes magnitudine æquales in circuito tantum discrepare posse ut unius ambitus centies vel millies alterius ambitum exuperet. Si nimirum altera sit quadrata et rectangula; altera vera intra easdem cum priore parallelas parallelogramma quidem sed admodum oblonga. Sequitur porro isoperimetras figuras areas immenso quantum diversas continere posse.]

Scholium.

Fig. 62.

EX hoc theoremate habetur dimensio parallelogrammi cuiuscunque. Illius igitur area producitur ex altitudine QX seu CA ducta in basim AB.

Nam area rectanguli CB parallelogrammo BL æqualis (a) Per schol. fit (a) ex AC ducta in AB. Ergo, &c. præced.

PROPOSITIO XXXVII. & XXXVIII.

Fig. 63.

Triangula (ACB, AFB) super basi eadem (AB) vel æquali, inter easdem parallelas CI, AZ) constituta, sunt æqualia.

(b) Per præc. Lateribus AC, AF duc parallelas BL, BI. Parallelogramma ACLB, AFIB sunt (b) æqualia. Sed horum triangula data (c) sunt dimidia. Ergo triangula data (d) sunt æqualia.

(c) Per 34. l. 1. Hæc propositio fiet universalis p. 1. lib. 6. Idem hic tyrones notent in triangulis, quod eos notare iussimus præced. de parallelogrammis.

Fig. 89.

Coroll. (1.) Hinc etiam Geodæta agri triangularis aream facillime dividunt. Sit e. g. ABC ager triangularis & sit basis BC bisecta in D. Erunt triangula ABD, ADC supra bases æquales BD & DC, & communem verticem A sive inter easdem parallelas æqualia. Q. E. F.

[Coroll. (2.) Hinc insuper cum Cl. Newtono, colligimus Areas quas Corpora quæcunque in gyros acta circa immobile centrum virium describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales. Dividatur enim Tempus in partes

tes aequales, & prima temporis parte describat corpus vi insita Fig. 90.
 rectam lineam AB . Idem corpus secunda temporis parte, si
 nihil impediret, recta ad c pergeret; describens lineam Bc aqua-
 lem ipsi AB , ita ut radius ad centrum ductis confecta forent
 aequales areae ASB , BSc . Verum ubi corpus venit ad B , agat
 vis centripeta impulsu unico sed magno, faciatque corpus à recta
 Bc deflectere. & in recta BC pergere: hoc est, sit vis centripeta
 in eo loco ad vim insitam ut Cc sive Bg ad Bc . Corpus itaque li-
 neam * diagonalem BC describet. Ipsi BS parallela agatur cC ,
 occurrens BC in C ; & completa secunda temporis parte corpus
 reperietur in C , in eodem plano cum triangulo primo SAB .
 Funge SC . Area radio ad centrum ducto descripta, hoc est tri-
 angulum SBC (a) aequale erit triangulo SBC ; atque adeo (b) tri- (a) Per 37.
 angulo primo SAB . Simili argumento tertia temporis parte cor-
 pus à C ad d vi insita pertingeret, ita ut linea Cd aequalis
 esset lineae CB : sed si vis centripeta sive major priore sive mi-
 nor iterum agat ad punctum C , in fine tertii temporis reperi-
 etur corpus alicubi in linea Dd , linea SC parallela: ideoque
 ut prius, diagonalem CD describet: & radio ad centrum ducto
 erit Triangulum SDC triangulo SAC , atque adeo reliquis
 SCB , SAB inter se equalibus aequale. Pari modo si vis cen-
 tripeta successive agat in D , E , F faciens ut corpus singulis tem-
 poris partibus DE , EF , &c. diagonales describat; Erunt ha in
 eodem plano, & triangula triangulis prioribus aequalia describen-
 tur. Aequalibus itaque temporibus aequales area in plano immo-
 to describuntur: atque adeo arearum summa quavis $SADS$,
 $SAFS$ sunt inter se ut descriptionum tempora. Augentur jam
 numerus, & minuatür latitudo triangularum in infinitum; &
 eorum ultima perimenter $ABCDEF$, &c. erit linea curva, &
 area hoc in casu in plano immobili descripta erunt etiamnum
 temporibus proportionales. [E. D.]

PROPOSITIO XXXIX. & XL.

Triangula aequalia (ACB , AFB) super eadem Fig. 64.
 basi (AB) vel aequali, ad easdem partes con-
 stiuta, sunt inter easdem parallelas (AB , CF .)

Si negas, sit CL parallela ad AB , & ducatur BL . Igitur
 ALB æquatur (c) ACB . Sed ex hyp. etiam AFB ipsi ACB (c) Per prac.
 æquale est. Ergo ALB , & AFB aequalia sunt, pars & to-
 tum. Quod fieri non potest. Igitur, &c.

[Coroll. (1.) Hinc etiam, cum Cl. Newtono, colligimus corpora Fig. 90.
 omnia qua in curva aliqua moventur, & areas circa centrum
 aliqua temporibus proportionales describunt, à vi centripeta
 ad

ad centrum illud tendente perpetuo urgeri. Ob aequalitatem enim triangulorum SCB , ScB eadem basi SB descriptorum, puncta C & c erunt in linea Cc basi parallela: atque adeo figura $BcCg$ erit parallelogrammum, cujus Bc & Bg sunt $\ast$ Virium directiones, & BC diagonalis. Urgetur itaque Corpus ad B vi Bg tendente ad S centrum virium. Atque ita in punctis omnibus C, D, E, F . Q.E.D.]

Coroll. (2.) Cum itaque in Planetarum primariorum Systemate, Area radiis ad Solem ductis sint semper temporibus proportionales, uti Astronomis est notissimum, Urgentur Planeta vi perpetua ad Solem tendente. Neque aliter de secundariis circa primarios suos est ratiocinandum.]

PROPOSITIO XLI.

Fig. 65.

SI triangulum (AFB) sit in iisdem parallelis cum parallelogrammo (AL) & basim eandem habeat (AB) vel aequalem, ipsius dimidium erit.

(a) Per 37.
& 38. l. 1.
(b) Per 34.
l. 1.

Duc CB . Triangula AFB , & ACB (a) æquantur. Sed (b) ACB est dimidium parallelogrammi AL . Ergo etiam AFB est dimidium AL . Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Fig. 65.

EX hac, & ex scholio prop. 35. discimus, aream trianguli (AFB) cujuscunque produci ex dimidia altitudine FI ducta in basim (AB) vel ex dimidia basi in altitudinem. Quare noto uno latere trianguli, & altitudine, five perpendiculari, quæ in latus notum ex angulo opposito ducitur, habetur trianguli dimensio; ut si basis AB sit pedum 100. altitudo FI . 85. multiplica basis dimidium 50. per 85. proveniunt 4250. pedes quadrati pro area trianguli AFB . Porro altitudo five perpendicularis illa, quando area trianguli peragrari potest, Mechanice innotescit, uti latera. Si area peragrari nequeat, invenietur Geometricè altitudo per 12. & 13. l. 2. ut in scholio ibidem docebimus.

In triangulo rectangulo, altitudo est eadem cum alterutro latere circa angulum rectum. Hujus ergo semissis ducta in latus alterum recto adjacens, dabit trianguli aream.

PRO.

PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo (ACB) aequale parallelogrammum facere, habens angulum parem dato (O). Fig. 66.

Basim AB biseca in F . Per C duc (a) CX parallelam AB . (a) Per 31.
Fac (b) angulum BAL parem dato O . Duc (c) FI parallelam AL . Erit $ALIF$ quod queritur. (b) 3. 41. (c) Per 31.

Ducatur enim FC . Parallelogrammum AI angulum habet LAF parem dato O ; & est æquale triangulo dato ACB , cum tam (d) triangulum ACB , quam (e) parallelogrammum AI , dupla sint ejusdem trianguli ACF . (d) Per 38. (e) Per 31.

Corollarium.

Dato triangulo ACB habetur æquale rectangulum, si per $Fig. 66$, C ducatur parallela lateri AB , & bisecta AB in F , ex B erigatur perpendicularis BQ . Erit enim rectangulum sub FB & QB par triangulo ACB .

PROPOSITIO XLIII.

IN parallelogrammo (BL) complementa (BO , OL) eorum qua circa diametrum existunt (RF & CS) sunt aequalia. Fig. 67.

Si per diametri AQ punctum quodvis O ducatur CF parallela lateri AB , & RS parallela lateri BQ ; secatur totum BL in quatuor parallelogramma, quorum duo circa diametrum sunt, RF , CS , duo reliqua BO , OL , sunt horum complementa.

Ea esse æqualia sic ostenditur. Triangula ABQ , ALQ (f) æquantur, similiter ARO , OCQ (g) æquantur AFO , OSQ . Ergo si ab æqualibus ABQ , ALQ auferas æqualia, hinc ARO , OCQ , inde AFO , OSQ , æqualia remanent BO & OL . Quod erat demonstrandum. (f) Per 34. (g) Per 31.

PROPOSITIO XLIV.

Ad datam rectam (OS) parallelogrammum constituere dato triangulo (V) aequale in angulo dato (X). Fig. 68.

Fac (h) parallelogrammum RC dato V æquale, habens angulum parem dato X . (h) Per 42.

angulum ROC parem dato X , & pone latus RO in directionem datæ OS . Per S duc SQ (a) parallelam OC , cui occurrat BC producta in Q . Per Q & O ducta recta occurrat BR protracta in A . Per A duc AL parallelam ad OS , cui occurrant CO , & QS productæ in F & L . Parallelogrammum OL est quod petitur.

(b) Per præc. Nam OL (b) æquatur RC , hoc est per constructionem, dato triangulo V ; & est ad datam OS ; habetque angulum (c) FOS parem angulo ROC , hoc est per const. parem dato X .

Scholium. Continet hac propositio Geometricam quandam divisionem. Etenim in divisione Vulgari Arithmetica, numerus dividendus tanquam rectangulum quoddam jure considerari potest. E.G. Rectangulum AB duodecim pedes quadratos complexum binario sit dividendum: hoc est Rectangulum invenendum est rectangulo AB aequale, cujus unum latus binario sit æquale, & inde exurgit quaestio quoto numero constabit latus illud quaesitum, quod quotientis instar erit habendum: Quod quidem hoc modo Geometrice construuntur. Circino accipe lineam $B D$ pedum duorum, & duc lineam diagonalem DEF . Linea

* Per 44. l. 1. AF est quam querimus. Complementa enim EG & EC æquantur, & rectanguli EG latus unum EH æquale est lineæ BD pedum duorum: & latus EI lineæ AF æquale est. Hac quidem Divisionis species Applicatio dicitur; quoniam spatium rectangulum AB lineæ BD sive EH applicatur. & inde fit quod Divisio haud raro Applicatio nominatur: scilicet pro antiquorum Geometrarum consuetudine; qui constructionis Geometricæ, quæ regula & circino solis vitur, quam computi Arithmetici per numeros solos perficiendi potiore rationem semper habuerunt.

PROPOSITIO XLV.

Fig. 69.

Dato rectilineo (CBA) aequale parallelogrammum construere ad datam rectam (IQ) & in dato angulo (H).

Rectilineam resolve in triangula A, B, C ducendo rectas FL, FI .

(d) Per 44. l. 1. Ad datam IQ in angulo dato H , fac (d) parallelogrammum IV æquale triangulo A . Tum producat IR infinite

(e) Per eand. versus P : & ad rectam RV , in angulo VRP fac (e) parallelogrammum RZ æquale trigono B . Rursum ad rectam SZ in angulo ZSP fac parallelogrammum SG æquale trigono C . IG est parallelogrammum quaesitum.

(f) Per 27. l. 1. Nam (f) angulus ZVR par est sibi alterno IRV . Sed

(g) Per eand. (g) QVR & IRV sunt æquales duobus rectis. Ergo etiam QVR

QVR & ZVR duobus rectis æquantur. Ergo (a) QV & (a) Per 14.
ZV sunt in directum. Pari modo ostendam QZ & GZ l. 1.
esse in directum. Ergo tota QVZG est una recta, & qui-
dem parallela ad IX, cum per const. QV sit ad IP parallela.
Est vero etiam (b) XG parallela ad IQ, cum XG sit paral- (b) Per 30.
lela ad SZ, & SZ ipsi RV, & RV ipsi IQ. l. 1.

Ergo (c) IG est parallelogrammum: esse autem quale pe- (c) Per defm.
titur patet ex constructione. 35.

[Corollarium. Hinc facile invenitur excessus quo rectilineum
aliquod majus superat rectilineum minus: Nimirum si ad ean-
dem rectam I Q applicentur parallelogramma duo rectilineis
respective aequalia. Parallelogrammum enim quo majus excedit
minus, dabit rectilineorum differentiam. Q. E. I.]

Scholium.

A Djungo problema utile futurum ad praxim proposi-
tionis 14. lib. 2.

Dato quadrangulo BF rectangulum æquale describere.

Resolve in triangula per rectam AC. Ex oppositis angulis Fig. 70.
demitte perpendiculares BO, FI. Biseca AC in S. Ex S erige
perpendicularem SL parem duabus BO, FI. Rectangulum
sub LS & SA æquatur dato BF. Demonstratio patet ex 41.

PROPOSITIO XLVI.

A Data recta (AB) quadratum descri-
bere.

Erige duas perpendiculares æquales datæ AB nempe AC, Fig. 71.
BE, & junge CE. Dico factum.

Cum enim anguli A & B duo sint (d) recti, erunt (e) AC, (d) Per const.
BE parallele: sunt vero etiam (f) æquales. Ergo (g) CE, (e) Per 29.
AB sunt parallele & æquales. Ergo figura est parallelogram- l. 1.
ma, & æquilatera: anguli quoque omnes sunt recti: (cum (f) Per const.
enim A & B sint recti, etiam recti erunt (h) oppositi, E l. 1.
& C.) Ergo figura AE, est quadratum. (h) Per 34.

[Eodem modo facile describes rectangulum quod sub datis l. 1.
duabus rectis contineatur.]

PROPOSITIO XLVII.

IN omni triangulo (ABC) rectangulo, quadra- Fig. 72.
tum lateris (AC) quod recto angulo opponitur,
æquale est duobus simul reliquorum laterum (AB,
CB) quadratis.

Du-

(a) Per de-
fin. qua-
drat.
(b) Per 4.
l. II
(c) Per 41.
l. I.

Ducantur IC, BF, & BE parallela AF. Si angulis IAB, FAC rectis, ac proinde æqualibus, addatur communis BAC, erunt toti IAC, FAB æquales. Sunt vero in triangulis IAC, FAB etiam latera, quæ æquales illos angulos continent, inter se (a) æqualia, nempe, IA, CA, ipsis BA, FA; alterum alteri. Ergo triangula IAC, FAB (b) æquantur: Quæ, quia cum parallelogrammis ABLI & ZAFE consistunt in iisdem basibus IA, FA, & in iisdem parallelis IA, LBC, & AF, EZB, sunt (c) eorum dimidia. Ergo parallelogramma ABLI, ZAFE, utpote æqualium dupla, erunt æqualia inter se. Eodem discursu ductis rectis AX, BR ostendam parallelogramma, EC, BX æqualia esse. Totum igitur AR utrisque IB & BX æquale erit. Quod erat demonstrandum.

Assumptum fuit LBC esse parallelam IA, adeoque LB, BC esse unam rectam. Id vero patet ex 14. cum anguli LBA & CBA ambo recti sint per hypothefim.

Scholium.

HOC theorema (quod prop. 31. lib. 6. Euclides ad omnes figuras similes extendet) Pythagoricum appellatur passim, ab inventore Pythagora; qui, ut testantur Proclus, Vitruvius, alique, Musis victimas immolavit, quod se in tam præclaro invento ab iis adjutum putaret. Ignorabat videlicet scientiarum Dominum, verum & unicum omnis sapientie auctorem Deum; aut certe si cognovit, non sicut Deum glorificavit. Frequens porro hujus theorematis & eximius per Mathematicam totam usus est; ac viam imprimis ad incommensurabiles magnitudines, arcanum ingens Geometricæ Philosophiæ, cognoscendas aperit.

Fig. 71.

Quadrati latus esse diametro incommensurabile, celeberrimum est apud veteres Philosophos, Aristotelem præsertim & Platonem, adeo ut qui hoc nesciret, eum Plato non hominem esse, sed pecudem diceret. Notitia porro hujus mysterii duxisse videtur originem ex hac prop. 47. Nam cum in quadrato angulus A rectus sit, erit quadratum diametri CB æquale quadratis laterum AB, AC, ac proinde duplum unius. Quare cum quadratum diametri CB sit 2. & quadratum lateris AB sit unitas, erit diameter CB radix quadrata, 2. & latus AB radix quadrata unitatis, sive ipsa unitas, quarum proportio (ut suo loco demonstrabitur) numeris explicari nequit, ac proinde incommensurabiles sunt.

Atque hoc vel unico argumento, tametsi cætera omnia deficerent, evidentissime conficitur, magnitudines ex definito punctorum numero componi non posse: Alias enim nullæ essent

essent incommensurabiles, omnium quippe mensura communis esset punctum.

His subjungo tria problemata ex eadem propositione deducta, quorum usus frequentior.

Problema 1.

Datis quocunque quadratis, unum omnibus æquale construere. Fig. 73.

Dentur quadrata tria, quorum latera sint AB, BC, CE . Fac angulum rectum $F B Z$ infinita habentem latera, in ea- que transfer BA , & BC ; & junge AC . Erit AC quadratum æquale (*) quadratis AB, BC . Tum AC transfer ex B in X ; & CE tertium latus datum, transfer ex B in E , & junge EX : erit quadratum ex EX æquale (b) quadratis ex EB (seu EC) & ex BX : hoc est æquale tribus datis quadratis ex AB , ex BC , ex CE . (a) Per 47. l. 1. (b) Per eand.

Problema 2.

Datis duabus rectis inæqualibus (AB, BC) exhibere quadratum, quo quadratum majoris (AB) excedit quadratum minoris (BC). Fig. 74.

Centro B , intervallo BA describe circulum. Ex C erige perpendicularem CE , occurrentem peripheriæ in E . Quadratum ex CE est excessus quadratus.

Ducatur enim BE . Quadratum BE , hoc est AB , æquatur (c) quadrato BC & quadrato CE . Ergo &c. (c) Per 47. l. 1.

Problema 3.

Notis duobus quibuscunque lateribus trigoni rectanguli, reliquum invenire. Fig. 75.

Latera rectum angulum ambientia sunt AC, AB , hoc 6. pedum, illud 8. Oporteat invenire quot pedum sit CB recto oppositum. Duc 6. & 8. in se ipsa; orientur laterum quadrata 36. & 64. quorum summa est 100. Radix quadrata 100. nempe 10. dat pedes lateris BC quaesiti. Demonstrat ex 47. Nam summa quadratorum BA & AC æquatur quadrato BC . Ergo horum summae radix eadem est cum radice seu latere BC .

Nota sint deinde latera AB, BC , hoc 10. pedum, illud 6. Oporteat invenire AC . Lateris AB quadratum 36. aufer ex 100. quadrato lateris BC . Residuum 64. erit quadratum lateris AC . Radix ergo 64. (nempe 8.) dat pedes lateris AC .

D

Corollæ

Corollarium. Hinc Tabularum qua Sinus, Tangentes, atque Secantes continent originem repetimus. Sit enim e.g. Circuli semidiameter AC partium 100000: & Angulus BAD graduum 30. Quoniam Chorda sive subtensa graduum 60 Per Coroll. * equalis est AC semidiametro; BD sinus graduum 30. semissi semidiametri sive $\frac{1}{2} AC$ equalis erit: & proinde partes 50000 continebit. In rectangulo vero triangulo ADB , quadratum AB aequale est quadratis AD & BD . Quadratum itaque semidiameter AB (100000 in 100000 ducendo) & ab isto quadrato quadratum BD subtrahit: Reliquum erit Quadratum AD , aut cosinus eidem equalis BF : e quo extracta radice dabitur linea BF . Deinde per analogiam sequentem $AD : BD :: AC : CE$ habebitur Tangens CE . Et si quadratum AC quadrato CE adjiciatur, radice extracta habebitur secans CE . Q. E. I.

P R O P O S I T I O XLVIII.

Fig. 76.

SI quadratum ab uno trianguli latere (AB) descriptum, sit aequale duobus reliquorum laterum (AC , BC) quadratis: angulus (ACB) quem reliqua latera continent, rectus erit.

Si negas, erit angulus ACB recto major aut minor. Ergo (ut demonstrabitur prop. 12. & 13. l. 1. quae ab hac non dependent) quadratum AB non erit aequale quadratis AC , BC , contra hypothesein.

Vel sic. Duc FC perpendicularem ad AC , & aequalem CB , & junge AF . Quadratum AF aequale est (a) quadratis FC , CA ; hoc est (b) quadratis BC , CA ; hoc est per hyp. quadrato AB . Ergo rectae AF , AB aequales sunt. Quoniam igitur trigona X , Z , sunt sibi mutuo aequilatera, (c) Per 8. l. 1. anguli ad C (c) sunt aequales. Ergo (d) recti. Quod erat (d) Per def. demonstrandum.

14.

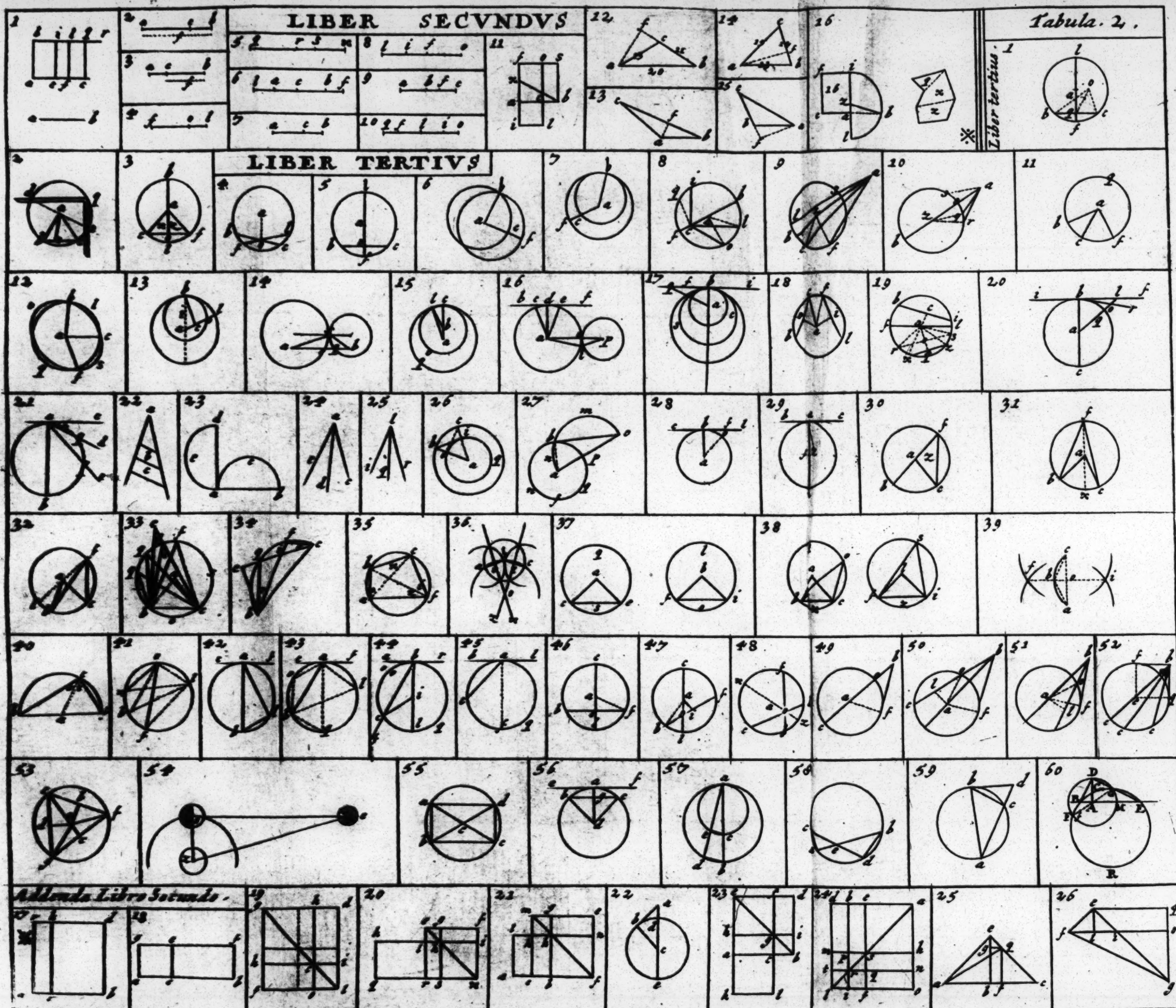
Ad-
Cir-
AD
60
se-
urtes
qua-
est
) O
erit
o ex-
quon-
Es si
ha-

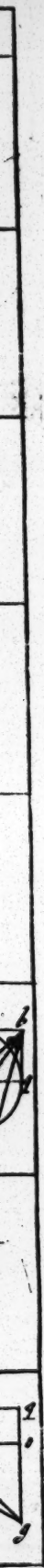
) de-
erit
7

Ergo
de-
AC,

ualem
) qua-
est per
sunt.
latera,
d erat

ELE-





G

I

T

100

Var

Index

Per

1999

F01



ENT

• Reliability

GRUPO

Dr.

1971

9

bus

YAMAHA

lege

D

P

—

citu

CON

1

lati

form

100

A

rec

run

10

10

1

1998

10

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER SECUNDUS.

HIC liber mole parvus, at præstantia ac utilitate the-
orematum plane magnus. Tyrones, scio quod
dico, nondum capient; sed esse verissimum ulte-
rius provecti, usu ipso certissime intelligent.

TRactat autem Hic Liber secundus de Rectarum linearum
potentiis; hoc est quadratis. Comparatque Rectangula
varia, e rectarum aut bifariam aut utcumque divisarum parti-
bus oriunda cum totarum linearum rectangulis & quadratis.
Pars hæc sane elementorum longe utilissima est: speciatim autem
Operationum Algebraicarum præcipuarum vera fundamentum.
Propositiones tres priores demonstranda Multiplicationi, Quarta
rectarum quadraticarum extractioni inseruit. Quæ sequun-
tur quinta, sexta, septima, octava Operationibus Algebraicis;
Reliquæ vero Trigonometricis conferunt plurimum. Prima
quidem fronte Tyronibus hæc liber videtur difficillimus; eo quod
mysterii quiddam in se continere sibi imaginentur. Attamen
Demonstrationes in eodem adhibita pleraque omnes facillimo
huic axiomati nitantur, Totum, nempe, omnibus suis parti-
bus simul sumptis æquari. Ne vero animum despondeant Ty-
rones, si prima vice perfecte nequeant comprehendere. Inter re-
legendum enim se tam clara non intellexisse olim mirabuntur.

DEFINITIO.

PARALLELOGRAMMUM rectangulum (A E) quod rectangulum Fig. 60. 1.
simpliciter sine ullo addito appellari solet) contineri di-
citur sub duabus lineis rectis (A C, A F) rectum angulum
comprehendentibus.

Nam earum altera A C altitudinem rectanguli, altera A F
latitudinem determinat. Deinde si intelligatur latus A C
ferri perpendiculariter per totam A F, aut A F per totam
A C, producet eo motu area rectanguli. Quare merito
rectangulum fieri dicitur ex ductu, seu multiplicatione duo-
rum laterum contiguum.

Quando igitur dicitur ex. gr. rectangulum sub (vel ex) Fig. 2. Ab. 2.
D 2 A C,

AC, CB, vel brevitatis causa, rectangulum ACB, designatur rectangulum quod continetur sub AC & CB ad rectum angulum constitutis. Similiter, cum dicitur rectangulum sub AB, CB, vel rectangulum ABC, designatur rectangulum contentum sub rectis AB & BC rectum angulum comprehendentibus.

Rectangulum porro aliud est oblongum, aliud quadratum. Oblongum est quod latera contigua habet inæqualia, sive quod continetur sub duabus rectis inæqualibus. Quadratum rectangulum est, quod sub duabus æqualibus continetur.

NOTA.

Signum aequalitatis in hoc libro est, $\simeq$.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. lib. 2.

SI fuerint due recte (AB, AC) quarum altera secta sit in quocunque partes (AE, EF, FC:) erit rectangulum sub illis duabus (AB, AC) comprehensum, æquale rectangulis, quæ sub infecta (AB) & singulis secta partibus (AE, EF, FC) continentur.

(a) Per 19.
& 34. Li.

Statue AB perpendicularem ad AC, per B duc infinitam BR perpendicularem ad AB. Ex E, F, C erige perpendiculares EI, FL, CQ. Erit BC rectangulum sub AB, & AC: & est æquale rectangulis BE, IF, LC; hoc est (quia tam IE, quam LF sunt (a) æquales AB;) rectangulis sub AB, AE, sub AB, EF, sub AB, FC.

Scholium.

DEcem prima hujus libri theoremata etiam vera sunt in numeris, si ut lineæ dividantur in partes. Rectangula numerica prodeuntur ex multiplicatione duorum numerorum, quadrata vero numerica ex multiplicatione numeri per se ipsum.

[Sit numerus infectus 9: & sectus 12: qui in partes tres nimirum 3, 4 & 5 dividatur. Erit rectangulum ex 9 in 12 ducto = 108 æquale rectangulis tribus 27 & 36 & 45, ex 9 in 3 & 9 in 4 & 9 in 5 respectue ducto compositis. Vel sit numerus 432 tanquam multiplicandus sectus in 400 & 30 & 2. Atque numerum 8 tanquam multiplicans infectus; erit

erit $8 \times 432 = 3456$ aequalis $8 \times 400 = 3200 + 8 \times 30 = 240 + 8 \times 2 = 16$. Unde etiam Multiplicationis demonstratio peti debet.]

PROPOSITIO II.

Si recta (AB) secta sit utcumque (in C ;) duo ^{Fig. 2.} rectangula sub tota (AB) & partibus (AC , CB) comprehensa, quadrato totius equalia sunt.

[Est enim AD quadratum totius; & AH , CD rectangula ^{Fig. 17.} sub AB & partibus AC , CB .]

Accipiat F æqualis AB .

Rect. FAB . æ. (a) rect. FAC }
rect. FCB }

^{Fig. 2.}
(a) Per 1. l. 2.

hoc est, quia F & AB sunt æquales inter se

Quad. ex AB . æ. rect. BAC }
rect. ABC }

[Sit numerus 8 in 5 & 3 sectus: quadratum totius $8 \times 8 = 64$.
æquale est rectangulis $8 \times 3 = 24$ & $8 \times 5 = 40$.]

PROPOSITIO III.

Sit recta (AB) utcumque secta in (C ;) Erit rectan- ^{Fig. 3.}
gulum sub tota (AB) & partium alterutra
(BC) comprehensum, æquale rectangulo sub parti-
bus (AC , CB) una cum quadrato predictæ par-
tis (BC .)

[Est enim AF rectangulum, sub tota AB & parte AC ; & ^{Fig. 18.}
 CF rectangulum partium, AE vero quadratum partis AC .]

Assume F æqualem CB .

Rect. ABF . æ. (b) rect. ACF }
rect. CBF }

^{Fig. 3.}
(b) Per 1. l. 2.

hoc est, quia æquales sunt CB & F .

Rect. ABC . æ. rect. ACB }
quad. CB . }

[Sit numerus 7 in partes 3 & 4 sectus. Rectangulum $7 \times 3 = 21$
æquale est rectangulo $3 \times 4 = 12$, & quadrato $3 \times 3 = 9$.
Pariter Rectangulum $7 \times 4 = 28$ æquale est rectangulo $3 \times 4 = 12$, & quadrato $4 \times 4 = 16$.]

PROPOSITIO IV.

Fig. 4.

SIT recta (FL) utcumque secta (in O:) erit quadratum totius aequale quadratis partium (FO, OL) & bis rectangulo sub partibus (FO, OL) contento.

Fig. 19.

[Est enim FD Quadratum totius; CG vero & CL quadrata partium: & CF, CD duo aequalia rectangula sub partibus.]

Fig. 4.

(a) Per 2. l. 2.

(b) Per 3. l. 2.

(c) Per eand.

Quad. FL. æ. (a) rect. FLO cum
rect. LFO
Atqui rect. FLO. æ. (b) rect. FOL }
quad. OL }
& rect. LFO. æ. rect. LOF }
quad. FO }
Ergo quad. FL. æ. (c) rect. FOL }
quad. OL }
rect. FOL }
quad. FO }
Id est quad. FL. æ. rect. FOL bis }
quad. OL }
quad. FO }

[Sit numerus 10 in partes 7 & 3 sectus. Quadratum $10 \times 10 = 100$ aequale est quadratis partium $7 \times 7 = 49$ & $3 \times 3 = 9$, & duobus rectangulis $7 \times 3 = 21$ & $7 \times 3 = 21$. Et hinc pender radices quadratica extractio.]

Fig. 19.

Corollarium (1.) Hinc liquet parallelogramma circa diametrum quadrati OI, HK esse quadrata.

(2.) Item diametrum cujuscvis quadrati ejus angulos bisecare.

3. Quadratum linea dimidia est quadrati linea integra pars quarta. Rectangula enim & quadrata in quatuor aequalia quadrata desinunt: uti in figura videre est.]

PROPOSITIO V.

Fig. 5.

SI recta (QX) secta fuerit equaliter (in R) & inequaliter (in S,) erit rectangulum sub inequalibus partibus (QS, SX) contentum, una cum quadrato partis intermediae (RS) aequale quadrato dimidia (QR.)

Est

[Est enim $\triangle H$ rectangulum sub partibus inequalibus, & LG Fig. 20. Quadratum partis intermedia, & RF Quadratum dimidia, & ob rectangulum $\triangle L$ rectangulo SF aequale, & reliquum spatium utrinque commune, liquet propositum.]

Rect. $Q SX$ (a) æ. rect. QR, SX }
rect. RSX }

Fig. 5.
(a) Per 1. l. 2.

Atqui ob æqualitatem rectarum QR, RX

Rect. QR, SX æ. rect. RXS ,
id est

æ. (b) rect. RSX }
quad. SX }

(b) Per 3. l. 2.

Ergo rect. $Q SX$. æ. rect. RSX }
quad. SX }
rect. RSX }

Addatur utrisque quad. RS . habebitur,

{ rect. $Q SX$ rect. RSX } id est
{ quad. RS æ. quad. SX } (c) quad. RX (c) Per 4. l. 2.
rect. RSX } seu QR .
quad. RS }

[Sis numerus 8 sectus equaliter in 4 & 4, atque inequaliter in 5 & 3. Erit rectangulum $5 \times 3 = 15$ una cum quadrato $1 \times 1 = 1$ aequale quadrato $4 \times 4 = 16$. Atque hinc pendet radicum quadraticarum adfectarum extractio in Algebra utilissima.]

PROPOSITIO VI.

SI recta (AB) sit bifariam secta (in C ;) eique Fig. 6.
recta quadam adjiciatur (BF ;) erit rectangulum sub tota composita (AF) & adjecta (BF) contentum; una cum quadrato dimidia (CB) aequale quadrato (CF) composita ex dimidia & adjecta.

[Est enim AN rectangulum sub tota composita & adjecta; Fig. 21. & KG quadratum dimidia; CE vero quadratum composita ex dimidia & adjecta. Et ob rectangulum HE rectangulo AK aequale, & reliquum spatium utrinque commune, liquet propositum.]

Adde in directum LA , æqualem adjectæ BF . Cum æqua- Fig. 6.
libus AC, BC , æqualia addantur AL, BF , erunt totæ LC, FC æquales. Unde LF secta erit æqualiter in C , & inæqualiter in B .

Ergo { rect. $LB F$.
cum
quad. CB . } æ. (d) quad. CF .

(d) Per præc.

Sed ob æqualitatem rectarum LB & AF

rect. LBF.

Æ. rect. AFB.

{ Ergo rect. AFB.

Æ. quad. CF

{ quad. CB.

[Sit numerus 6 sectus aequaliter in 3 & 3: eique addatur numerus 2. Erunt rectangulum $8 \times 2 = 16$ & quadratum $3 \times 3 = 9$ equalia quadrato $5 \times 5 = 25$.]

Fig. 22.

Corollarium. Hinc, cum Maurolyco, ex observatione unica Telluris diametrum metiri discimus. Sit AD montis altitudo nota: & AB linea terram tangens mensurando nota. Linea DE bifariam dividitur in centro C, & ei linea DA adjicitur. Unde Rectangulum AE, AD, una cum quadrato DC aequale est quadrato AC. Hoc est * quadratis AB, BC. Ablato itaque utriusque quadrato CD vel CB, relinquetur rectangulum AE, AD aequale quadrato AB. Dividatur ergo notum quadratum AB per notam montis altitudinem AD, & Quotiens dabit lineam AE. A qua subtrahere notam montis altitudinem AD, reliqua erit linea DE telluris diameter. Q.E.D.

* Per 47. l.1.

PROPOSITIO VII.

Fig. 7.

SI recta (AB) fuerit utcumque secta (in C,) erunt quadrata totius (AB) & segmenti alterutrius (AC,) equalia bis rectangulo contento sub tota (AB) & segmento dicto (AC,) una cum quadrato segmenti alterius (CB.)

Fig. 23.

[Est enim EB Quadratum totius, & AL Quadratum partis AC. Et ob duo equalia rectangula sub tota & ista parte E I H L; & GB quadratum partis alterius, idem spatium continentia, liquet propositum.]

Fig. 7.

(a) Per 4. l.1.

Quad. AB. (a) Æ. rect. BCA bis

quad. AC

quad. BC

Adde utrisque quad. AC. erunt

{ Quad. AB. Æ. rect. BCA bis

{ quad. AC quad. AC bis

quad. BC

(b) Per 3. l.2. Atqui rect. BCA bis cum quadrato AC bis, æquatur (b) rectangulo BAC bis. Quare si pro BCA bis & quad. AC bis substituamus BAC bis; erit.

{ Quad. AB. Æ. rect. BAC bis

{ quad. AC quad. BC

Sit

[Sit numerus 13 utcumque sectus in 9 & 4. Erunt quadrata $13 \times 13 = 169$; & $9 \times 9 = 81$ equalia $13 \times 9 = 117$, & $13 \times 9 = 117$, & quadrato $4 \times 4 = 16$.]

PROPOSITIO VIII.

SI recta (LF) fuerit secta bisariam (in I) eique Fig. 8.
quadam recta adjiciatur (FO;) erit rectangu-
lum (LIO) quod sub (LI) dimidia, & (IO)
composita ex dimidia & adjecta continetur; quater
sumptum, una cum quadrato adjectæ (FO) equale
quadrato totius compositæ (LO.)

[Est enim AL quadratum totius compositæ: continens rectan- Fig. 24.
gula equalia sub LI & IO quatuor, (nimirum DR, B Q,
RO, & quartum ab LR & QH simul additis conflatum.)
& quadratum HE. Unde liquet propositum.]

{ Quad. IO. (a) æ. rect. OIF bis
quad. IF quad. FO }

Fig. 8.
(a) Per prec.

hoc est, quia ex hyp. FI, LI sunt æquales, ac proinde quad.
FI est quad. LI, & rect. OIF est rect. OIL, seu LIO

{ quad. IO. æ. rect. LIO bis
quad. LI quad. FO }

Quare si utrisque æqualibus addas rect. LIO bis. Erit

{ quad. IO
quad. LI
rect. LIO bis
id est

(b) quad. LO. æ. rect. LIO bis
quad. FO
rect. LIO bis
Id est
æ. rect. LIO quater
& quad. FO }

(b) Per 4. L2.

[Sit numerus 12 sectus aequaliter in 6 & 6; eique addatur
numerus 4. Erunt quatuor rectangula $10 \times 6 = 240$ & qua-
dratum $4 \times 4 = 16$ equalia quadrato $16 \times 16 = 256$.]

PROPOSITIO IX.

SI recta (AC) sit divisa bisariam (in B) & Fig. 9.
non bisariam (in F;) erunt quadrata partiam
in-

inequalium (AF , FC) dupla quadratorum dimidia (AB) & partis intermedia (BF .)

Fig. 25.

[Sis BE equalis & perpendicularis BA . Unde peracta constructione prout figura monstrat, Erunt linea AB , BE , BC & quales: & linea EG , G & Q aequales. Anguli AEC , ABE , CBE , EG & QFC recti: Anguli vero AEB , BEC , ECA , C & QF , E & Q semirecti. Unde AE quadratum * duplum erit quadrati AB dimidia, & E & * quadratum, duplum quadrati G & vel BF partis intermedia. Quadrata vero AE & E & aequalia sunt * quadrato A & : hoc est quadratis * AF & F & sive FC partium inaequalium. Q. E. D.]

Fig. 9.

(a) Per 4.12.

quad. AF . Σ . (a) rect. ABF bis
 quad. AB
 quad. BF .

Addito igitur utrisque quad. FC ,

{ quad. AF . Σ . rect. ABF bis
 { quad. FC quad. AB
 quad. BF
 quad. FC

Sed rect. ABF est rect. CBF , quia AB , BC sunt aequales ex hyp.

Ergo { quad. AF . Σ . rect. CBF bis
 { quad. FC quad. AB
 quad. BF
 quad. FC

(b) Per 7.12. Atqui (b) CBF bis cum quad. FC aequantur quadratis BC , BF , seu AB , BF : quare si haec illis substituas, erunt

{ quad. AF . Σ . quad. AB
 { quad. FC quad. AB
 quad. BF
 quad. BF
 Id est
 quad. AB } bis
 quad. BF



[Sis numerus 32 divisus aequaliter in 16 & 16; & inaequaliter in 20 & 12. Erunt quadrata $20 \times 20 = 400$ & $12 \times 12 = 144$ dupla quadratorum $16 \times 16 = 256$ & $4 \times 4 = 16$.]

PROPOSITIO X.

Fig. 10.

SI recta (FI) sit bisecta, (in L) eique quadam recta adjiciatur (IO ;) erunt quadrata totius

com-

composita (FO) & adjecta (IO) dupla quadratorum quæ describuntur super dimidia (FL) & super (LO) composita ex dimidia & adjecta.

[Supposita constructione priori haud dissimili, prout figura mon- Fig. 26. fiat: FE quadratum, duplum * est quadrati FL dimidia, & EG quadratum, * duplum quadrati E Q vel LO composita ex * Per 47. l. 1. dimidia & adjecta. Quadrata vero FE & EG aequalia sunt * quadrato FG; hoc est quadrato FO totius composita, & quadrato OG vel OI partis adjecta. Q.E.D.]

Adjiciatur in directum QF, æqualis IO. Quia ergo etiam Fig. 10. FL, IL æquantur ex hyp. erunt totæ QL, OL æquales, ac proinde QO bisecta est in L, & aliter in I. Ergo.

$$\left. \begin{array}{l} \text{quad. QI} \\ \text{quad. IO} \end{array} \right\} \text{æ. (a) } \left. \begin{array}{l} \text{quad. QL} \\ \text{quad. LI} \end{array} \right\} \text{bis} \quad \text{(a) Per præc.}$$

Sed quad. QI est quad. FO, & quad. QL est quad. LO, & quad. LI est FL

$$\text{Ergo } \left. \begin{array}{l} \text{quad. FO.} \\ \text{quad. IO} \end{array} \right\} \text{æ. } \left. \begin{array}{l} \text{quad. FL} \\ \text{quad. LO} \end{array} \right\} \text{bis}$$

[Sit numerus 40 sectus equaliter in 20 & 20, eique addatur numerus 14. Erunt Quadrata $54 \times 54 = 2916$ & $14 \times 14 = 196$ dupla quadratorum $20 \times 20 = 400$, & $34 \times 34 = 1156$.]

PROPOSITIO XI.

Datam rectam (AB) ita secare (in C,) ut rect- Fig. 11. angulum (ABC) sub tota & una parte contentum, æquale sit quadrato partis reliquæ (AC.)

Ex A erige perpendicularem AF parem AB. AF biseca in X. Duc rectam XB; cui ex FA producta æqualem abscinde XI. Tum abscinde AC æqualem AI. Dico factum.

Perficiatur quadratum B AFS, & ducta per C perpendiculari, perficiatur quoque rectangulum FILO. Quoniam FA bisecta est in X, eique adjecta est AI. Erit

$$\left. \begin{array}{l} \text{rect. FIA.} \\ \text{quad. XA.} \end{array} \right\} \text{æ. (b) quad. XI} \quad \text{(b) Per 6. l. 2.}$$

id est

$$\text{æ. (c) quad. XB}$$

id est

$$\text{æ. (d) } \left. \begin{array}{l} \text{quad. BA} \\ \text{quad. XA} \end{array} \right\}$$

(c) Per constr.

(d) Per 47. l. 1.

Aufc.

Auferatur utrimque quad. XA . Erit
 rect. FIA seu FL . æ. quad. BA ; id est AS .
 Quare ablato rursus communi AO
 Erit AL . æ. CS

Atqui AL est quadratum AC , cum AI , AC ex constr. sint
 æquales: & CS est rect. ABC , cum BS sit par AB . Ergo
 rectang. ABC æquatur quadrato AC . Datam igitur rectam
 secimus, ut petebatur.

Scholium.

Propositiones 10. primæ hujus libri veræ sunt, etiam in
 numeris. Hæc 11. numeris explicari non potest. Neque
 enim ullus numerus ita secari potest, ut productum ex toto
 in partem unam, æquale sit quadrato partis reliquæ. Porro
 mira vis est hujus sectionis, de qua vide prop. 30. l. 6.

PROPOSITIO XII.

Fig. 12.

IN trigono obtusangulo (ACB), quadratum la-
 teris (AB) obtuso angulo (C) oppositi, quadrata la-
 terum reliquorum (AC , BC) excedit rectangulo
 (BCF) bis, quod comprehenditur sub (BC) la-
 tere alterutro obtusum angulum (ACB) continen-
 tium, in quod, cum protractum fuerit, cadit per-
 pendicularis (AF ;) & sub (FC) intercepto ex-
 terius latere inter perpendicularem & obtusum an-
 gulum.

(a) Per 47.
l. 1.

Quad. AB . æ. (a) quad. AF }
 quad. BF }

(b) Per 4. l. 2. Sed quad. BF est (b) æquale quadratis FC , CB , & rect.
 BCF bis. Ergo si hæc substituas pro quad. BF ; erit

Quad. AB . æ. quad. AF }
 quad. FC }
 quad. CB }
 rect. BCF bis }

(c) Per 47.
l. 1.

Atqui quadrata AF , FC æquantur quadrato (c) AC . Quare
 hoc pro illis substituto, erit

Quad. AB . æ. quad. AC }
 quad. CB }
 rect. BCF bis }

PRO-

PROPOSITIO XIII.

IN triangulo quocunque (ACB ,) quadratum la- Fig. 13, 14
 teris (AB) acuto angulo (C) oppositi, à qua-
 dratis laterum reliquorum (AC , BC) exceditur
 rectangulo (BCF) bis, quod continetur sub (BC)
 latere alterutro acutum angulum (C) comprehen-
 dentium, in quod cadit perpendicularis (AF) ab
 opposito (A ;) & sub (CF) intercepta inter per-
 pendicularem (AF) & acutum angulum (C .)

Quad BC . $\propto$. (a) rect. BFC bis }
 quad. BF }
 quad. FC }

(a) Per 4. L. 2.

Et Quad. AC . (b) $\propto$. quad. FC
 quad. AF .

(b) Per 47.
L. 1.

Quare duo { quad. BC . $\propto$. rect. BFC bis }
 simul { quad. AC quad. BF }
 quad. FC bis }
 quad. AF .

Atqui rectang. BFC bis cum quad. FC bis æquatur (c) (c) Per 3. L. 2.
 rectangulo BCF bis. Ergo hoc pro illis substituto

{ Quad. BC . $\propto$. rect. BCF bis }
 { quad. AC . quad. BF }
 quad. AF .

Atqui quadrata AF , BF , sunt (d) quad. AB . Ergo hoc (d) Per 47.
 pro illis substituto L. 1.

{ Quad. BC . $\propto$. rect. BCF bis }
 { quad. AC . quad. AB }

Hoc est, BC , AC quadrata excedunt quad. AB rectan-
 gulo BCF bis.

Corollarium.

VEra est propositio licet perpendicularis cadat extra tri- Fig. 15.
 angulum. Demonstratio fere eadem est. [Vel brevius

sic: $ACq = (e) ABq + CBq + 2 CBF$. Adde utrinque (e) Per 12.
 CBq . $ACq + CBq = ABq + 2 CBq + 2 CBF = (f) ABq + (f) Per 3.
 2 CBF. Q. E. D.]$ pr. 1. 2.

Scholium.

EX hac & 47. lib. 1. habetur dimensio cujuscunque tri-
 anguli cujus tria latera sint nota, licet aream habeat
 imperviam. Horum quippe theorematum beneficio innotescit
 per-

perpendicularis, etiam si eam impedimenta loci non sinant designari. Perpendicularis autem multiplicata per semissem lateris, cui incidit, producit aream trianguli, ut patet ex scholio propof. 41. l. 1.

Fig. 15.
vel 14.

Esto trigonum quodcunque ACB nota habens latera. Oporteat notam reddere perpendicularem AF ex dato angulo A in latus oppositum BC .

Quadratum lateris AB acuto C oppositi, aufer ex summa quadratorum AC , CB . Per 13. residuum erit rectangulum BCF bis. Residui semissem (hoc est rectangulum BCF) divide per notum latus BC . Proveniet recta CF . Quadratum rectae CF aufer ex quadrato AC . Residuum dabit

(a) Per prob. 2. schol. per 47. l. 1. quadratum (a) AF , cujus radix quadrata dabit perpendicularem AF .

Obtinere id ipsum poteris etiam ex p. 12. Verum 13. sufficit, cum in omni triangulo perpendicularis ex aliquo angulo in latus oppositum, intra triangulum cadat.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 16.

Dato rectilineo (QXZ),^a æquale quadratum construere.

(b) Per 45.
l. 1

Rectilineo QXZ fac æquale (b) parallelogrammum rectang. CI , cujus latera IA , CA , si æqualia fuerint, ipsum erit quadratum quod petitur: si inæqualia sint, latus majus IA produc in L , donec AL sit par AC . IL biseca in Z ; quo centro per I & L describe circulum, & producat CA , donec circumferentiæ occurrat in B . Quadratum rectae AB æquale est dato QXZ .

Ducatur enim recta ZB . Quoniam IL secta est bifariam in Z , & aliter in A ; erit

(c) Per 5.
l. 2.

$$\begin{cases} \text{rect. } IAL. & \text{æ. (c) quad. } ZL: \text{ hoc est} \\ \text{quad. } ZA. & \end{cases}$$

(d) Per constr.

$$\text{æ. (d) quad. } ZB: \text{ hoc est}$$

(e) Per 47.
l. 1.

$$\text{æ. (e) quad. } ZA? \\ \text{quad. } BA \}$$

Ablato igitur utrimque quadrato ZA communi, remanet

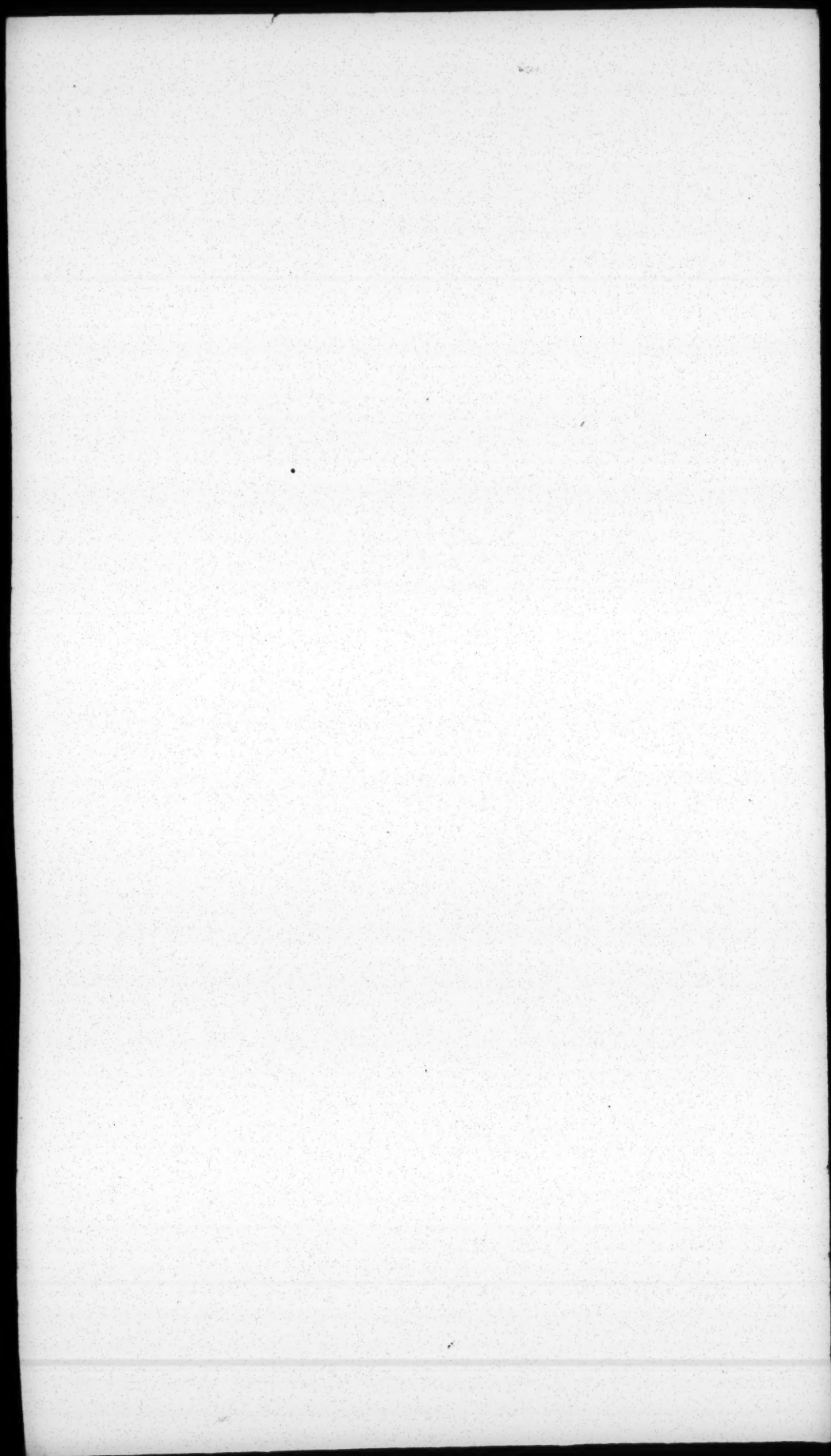
$$\text{rect. } IAL. \quad \text{æ. quad. } BA.$$

hoc est, quia AC , AL sunt æquales, erit

$$\text{rect. } CI. \quad \text{æ. quad. } AB$$

(f) Per constr.

Id est (f) rectil. QXZ .



Scholium.

Constructio Euclidea requirit, ut per 45. l. 1. rectilineum reducatur ad rectangulum. Quæ reductio cum satis operosa sit, fortasse expeditius problema absolvetur hunc in modum.

Rectilineum datum resolvatur in tot quadrangula (Z, X) quot potest. Tum singulis quadrangulis fac (a) rectangula (a) *Per schol. p. 45. l. 1.*
 æqualia. Si tunc superfit (ut hic contigit) unum triangulum (b) *Per coroll. p. 42. l. 1.*
 illi quoque fac (b) æquale rectangulum, singulis deinde rectangulis per hanc 14. fac quadrata æqualia: ac demum his omnibus quadratis unum æquale (c) fiat. Erit hoc æquale *(c) Per prob. 1. schol. p. 47. l. 1.*
 dato QXZ.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER TERTIUS.

Perfectissimæ inter planas figuræ proprietates fundamentales hoc libro demonstrantur. Libri utilitas vel hoc solo innotescit, quod tractet de circulo, rerum admirabilium per Mathesim universam fonte uberri-
mo. Theoremata illustriora sunt 16, 20, 21, 22, 31, 32, 35, 36.

Consinet autem liber hic tertius circuli proprietates: lineasque plurimas & intra ejusdem peripheriam & extra ad eandem ductas inter se comparat. Circulorum etiam se mutuo intersecantium, & se mutuo, aut lineas rectas tangentium affectiones explicat. Angulos etiam sive ad centrum sive ad circumferentiam positos inter se componit. Breviter; Prima Geometriæ Practicæ elementa; circulorum adminiculo potissimum immixta, exponit.

DEFINITIONES.

1. **C**irculi æquales sunt, quorum diametri seu semidiametri sunt æquales.
- Fig. 20. 7. 3. 2. Recta (FB) circulum tangere dicitur, quæ circulo sic occurrit (in B) ut tamen producta circulum non secet.
- Fig. 19. & 14. 3. Circuli tangere se dicuntur, cum sibi sic occurrunt, ut tamen non secent.
- Fig. 18. 4. In circulo æqualiter a centro (A) distare dicuntur rectæ (BC, FL) cum perpendiculares (AI, AO) quæ ex centro in ipsas ducuntur, sunt æquales.
- Fig. 37. 5. Segmenta, seu portiones circuli sunt partes, in quas circulum dividit recta (CE) circulum secans.
- Fig. 33. 6. Angulus in segmento est (BQC) qui continetur sub rectis lineis, quæ ad unum circumferentiæ punctum (Q) ex segmenti terminis (C, B) ducuntur.
- Fig. 33. 7. Angulus (CQB) insistere dicitur peripheriæ (BOC) quæ illi opponitur.
- Fig. 11. 8. Sector est pars circuli a duabus semidiamentris (AB, AF) & arcu (BF vel BCF) quem semidiametri intercipiunt, comprehensa.

PRO.

PROPOSITIO I.

Dati circuli centrum invenire.

Fig. 1. l. 3.

Ducatur in circulo recta BC utcunque, quam biseca in Q. Per Q duc perpendiculararem LF. Hanc biseca in A. Erit A centrum.

Si negas; centrum esto O extra rectam FL (nam in FL esse non poterit, cum ubilibet extra A dividatur inæqualiter) ducanturque BO, QO, CO. Quoniam igitur vis O centrum esse, erunt BO, CO æquales. Triangula igitur BOQ, COQ sibi mutuo æquilatera sunt, cum etiam ex constr. BQ & QC sint pares, & QO communis. Ergo (a) angulus OQC æ- (a) Per 8. l. r. quatur angulo OQB. Ergo OQC (b) rectus est, ac pro- (b) Per definit. inde angulo LQC per constr. recto æquatur, pars toti. 14. l. 1. Quod est absurdum.

Corollarium.

EX demonstratis patet, si in circulo recta (LF) aliam (BC) bifariam & perpendiculariter secat, in secante esse centrum.

Facillime per normam invenitur centrum; vertice Q ad Fig. 4. circumferentiam applicato. Si enim recta DE jungens puncta D & E, in quibus normæ latera peripheriam secant, bisecetur in A, erit A centrum. Demonstratio pendet ex 31. hujus.

PROPOSITIO II.

SI in circuli ambitu duo puncta sumantur (B, Fig. 5. C;) recta quæ per illa ducitur, intra circum- lum cadit.

Accipiat in recta BC quodvis punctum O, & ex centro A ducantur AO, AB, AC. Quoniam AB, AC æquantur, etiam (c) anguli B & C æquales erunt. Quoniam igitur ex- (c) Per 8. l. r. ternus AOC (d) major est interno B, major erit quoque (d) Per coroll. quam C. In triangulo igitur OAC, latus AC, subtendens i. p. 32. l. 1. majorem angulum AOC, majus est (e) latere AO subten- (e) Per 19. dente minorem C. Cum igitur AC tantum pertingat ex cen- l. 1. tro ad circumferentiam, AO non pertinget. Ergo punctum O intra circumlum cadet. Idem ostendetur de quovis alio puncto rectæ BC. Tota ergo BC cadit intra circumlum.

Ex ipsa etiam notione lineæ rectæ, & circularis, propositio est manifesta.

Q

Corolla-

Corollarium. Hinc sequitur rectam quamvis lineam circum tangentem, in unico puncto eundem tangere. Si enim circumferentia puncta duo tangeret, esset recta linea per duo circuli puncta ducta, atque adeo intra circulum caderet, contra tangentis definitionem. Et simili plane ratiocinio (a planis ad solida transeundo) probari posset planum quodvis sphaeram in unico puncto tangere.

PROPOSITIO III.

Fig. 3.

SI in circulo recta per centrum ducta (BL) aliam (CF) non per centrum ductam secet bisariam, secabit quoque perpendiculariter. Et si secet perpendiculariter, secabit bisariam.

1. Pars. Ex A centro ducantur AC, AF . Triangula X, Z sibi mutuo æquilatera sunt: Nam CO, FO ex hypotesi, & AC, AF quia ex centro, æquales sunt; AO vero communis est. Ergo (a) anguli AOC, AOF æquales. Ergo (b) recti. Quod erat primum.

(a) Per 3. 1. 1.

(b) Per defin. 14. 1. 1.

(c) Per 47. 1. 1.

2. Pars. Quia ex hyp. anguli AOC, AOF sunt recti, erit quad. AC (c) æquale quadratis AO, CO ; & quad. AF æquale quadratis AO, FO . Cum igitur quadrata AC, AF æqualia sint, etiam duo simul AO, CO duobus simul AO, FO æqualia erunt. Quare ablato utrimque communi quadrato AO , remanent CO, FO æqualia. Ac proinde etiam rectæ CO, FO sunt æquales. Quod erat alterum.

Coroll. (1.) [Hinc in triangulo quovis æquilatere aut etiam tantum Isoscele, linea ab angulo verticis bisecans basim, perpendicularis est basi. Et contra, perpendicularis ab angulo verticis bisecat basim.]

Corollarium (2.) [Hinc sequitur Chordam arcus cuiusvis dimidiam, esse semissis arcus sinum rectam.]

PROPOSITIO IV.

Fig. 4 & 5.

SI in circulo dua rectæ (BC, FL) non ambo per centrum ductæ, se secens, non secabunt se mutuo bisariam.

Fig. 5.

Nam si una LF transeat per centrum, patet hanc non bisecari ab altera BC , quæ ex hyp. per centrum A non transit.

Fig. 4.

Si neutra per centrum transit, ex A centro duc AO . Si jam ambæ BC, FL forent bisectæ in O , anguli quoque AOC

(d) Per præc. AOL essent (d) recti, ac proinde æquales, totum & pars. Quod fieri non potest.

PRO-

PROPOSITIO V. & VI.

Circuli se mutuo secantes, aut interius tangentes Fig. 6. & 7.
non habent idem centrum.

Alias enim ductis ex communi centro A rectis AB, AC, F;
essent AC, AF, (pars & totum) æquales, quia ambæ sunt
æquales eidem AB.

PROPOSITIO VII.

Sl in circulo, quodvis aliud a centro (A) acci- Fig. 8.
piatur punctum (C,) ex quo rectæ plures (CB,
CL, CO, CF) in circumferentiam cadant;

1. Maxima erit (CB qua per centrum transit.
2. Reliqua diametri pars (CF) minima.
3. Aliarum vero major est ea, qua maxima (CB)
propior.

4. Neque plures quam duæ ex dicto puncto (C,) quod a centro diversum est, ad circumferentiam duci possunt æquales.

Pars 1. Ducatur ex A centro recta AL. Quoniam AL, AB æquales sunt, addita communi AC, erunt LA cum AC, & BC æquales. Sed LA, AC sunt majores (a) quam LC. (a) Per 20. Ergo etiam BC major quam LC. Eodem modo BC ostenditur major quavis alia.

Pars 2. Ex centro duc AO rectam. AO, (hoc est AF) est minor (b) quam AC, CO. Ablata igitur communi (b) Per 20. AC, remanet FC minor quam CO. Eodem modo erit CF minor quavis alia.

Pars 3. In triangulis COA, CLA latera LA, AC æquantur lateribus OA, AC. Angulus vero LAE major est angulo OAC. Ergo (c) basis LC major basi OE. (c) Per 24. 11.

Pars 4. Patet ex præcedentibus. Nam si tres duci possent æquales, CO, CI, CQ, forent duæ CQ, CI, ad eandem partem inter se æquales. Quod repugnat parti 3.

Coroll Simili plane ratiocinio cum Theodosio colligimus, Arcuum circulorum maximorum, a puncto quovis a polo diverso in superficie sphaera ad circulum quemvis ductorum, maximum esse eum qui per circuli polum transit: minimum qui ad punctum oppositum ducitur: reliquorum vero eum esse majorem qui ma-

ximo est propior: duos vero solum inter se aequales ab eodem puncto ad circulum duci posse. Neque aliter de plerisque hujus libri propositionibus Lector per se ratiocinabitur. A planis enim ad solida in hisce rebus transire est sane facillimum.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 9. & 10. **S**I a puncto extra circulum accepto (*A*), ad circulum ducantur plures rectæ (*AB*, *AC*, *AF*) (*AO*, *AQ*, *AR*;)

1. Earum quæ in cavam peripheriam incidunt, maxima est (*AB*) transiens per centrum (*Z*.)

2. Aliarum major est ea, quæ maxima (*AB*) propior.

3. Extra circulum minima est (*AO*) quæ producta per centrum transit.

4. Quæ minima propior, minor est remotiore.

5. Non plures quam due ex dicto puncto - (*A*) in peripheriam duci possunt aequales, sive intra circulum, sive extra.

Fig. 9. Pars 1. Ex centro *Z* duc *ZC*. Quia æquantur *ZC*, *ZB*; addita communi *AZ*, erunt *AZ*, *ZC* ipsi *AB* æquales. Sed (*a*) Per 20. *AZ*, *ZC* majores sunt (*a*) quam *AC*. Ergo etiam *AB* major *AC*. Eodem modo erit *AB* major quavis alia.

L. 1. Pars 2. Duc *ZF*. Latera *CZ*, *ZA* æquantur lateribus *FZ*, *ZA*. Angulus vero *CZA* major est angulo *FZA*. Ergo (*b*) *basis* *CA* major basi *FA*.

(b) Per 24. L. 1. Pars 3. Duc *ZQ*. Duce *AQ*, *QZ* majores (*c*) sunt quam *AZ*. Ablatis igitur æqualibus *ZQ*, *ZO*, remanet *AO* minor quam *AQ*. Eodem modo *AO* minor erit quavis alia.

Fig. 10. (c) Per 20. L. 1. Pars 4. Duc *ZR*. Rectæ *AQ* & *QZ*, minores sunt (*d*) quam *AR*, *RZ*. Ablatis ergo æqualibus *ZQ*, *ZR*, remanet *AQ* minor quam *AR*.

Pars 5. patet ex quatuor præced.

PROPOSITIO IX.

Fig. 11. **S**I ab aliquo intra circulum puncto (*A*) plures quam due aequales ad ambitum duci possim; Id punctum centrum erit.

Patet ex 4. parte prop. 7.

PRO.

PROPOSITIO X.

Circuli in duobus tantum punctis se mutuo se-
cant. Fig. 12.

Secent enim si fieri potest in pluribus B, C, F. Ex A centro circuli LQ ducantur ad B, C, F, rectæ AB, AC, AF. Erunt hæ æquales. Quoniam ergo ex aliquo intra circum OS puncto A ductæ sunt tres æquales ad ejus peripheriam, AB, AC, AF, erit A (a) centrum quoque circuli OS. (a) Per præc. Ergo circuli LQ & OS se secantes habent idem centrum, quod repugnat propositioni 5.

PROPOSITIO XI.

Si duo circuli se intus tangant; recta per eorum
centra (A & I) ducta transibit per contactum (B.) Fig. 13.

Si negas, habeant, si fieri potest, centra eum situm, ut recta per illa transiens, cadat extra contactum B, secans circulos in O & L, sintque centra ipsa A & C; ac junge AB, CB. Quoniam igitur CB, CO æquantur, addita communi AC, etiam AC, CB æquales erunt AO. Sed (b) Per 20. AC, CB sunt majores quam AB; Hoc est (c) quam AL. (c) Per defn. Ergo etiam AO major est quam AL, pars toto. Quod est circuli absurdum.

PROPOSITIO XII.

Si circuli si tangant exterius; recta conjungens
centra, per contactum transibit. Fig. 14.

Si negas, sint si fieri potest centra ita posita, puta in A & B, ut recta per ipsa transiens, per contactum S non incedat, sed circulos secet in O & Q, junganturque AS, BS. Erunt igitur (d) AS, SB majores quam AB. Sed AS (e) est par (d) Per 20. AO, & BS par BQ. Ergo etiam AO, BQ sunt majores (e) Per defn. quam tota AB, pars toto. Quod fieri non potest. circuli.

[Corollarium. Recta a centro unius per contactum ducta, transibit per centrum alterius.]

PROPOSITIO XIII.

Circuli & sese mutuo, & lineam rectam pun-
ctualiter tangunt. Fig. 15. & 16.

Fig. 15. Tangant enim se intra (si fieri potest) duo circuli in parte
 (a) *Per 11.* circumferentiae CL . Per centra A & B ducta recta (a)
 1. 3. transibit per contactum, puta in C . Ducantur insuper AL ,
 (b) *Quia ex* BL . Quoniam igitur (b) BL , BC æquantur, (sunt enim ex
 centro. centro B ad peripheriam OLC .) addita communi AB , erunt
 AB , BL æquales AC . Sed AC est par AL , (sunt enim
 ex centro A ad peripheriam QLC . Ergo etiam AB , BL
 sunt æquales AL , contra 20. l. 1.

Fig. 16. Tangant se deinde exterius duo circuli, si fieri potest, in
 (c) *Per 12.* arcu OL . Recta AP centra A & P jungens (c) transibit
 1. 3. per contactum, puta in O . Ducantur insuper AL , PL ,
 Erunt igitur duo trianguli latera AL , PL æqualia ipsis,
 AO , PO , seu toti AP . Contra 20. l. 1.

Fig. 16. Denique recta BF & circulus se tangant, si fieri potest, in
 parte aliqua CE . Ducantur ad centrum rectæ CA , EA .
 Erunt igitur CA , EA æquales, ac proinde triangulum CAE
 (d) *Per coroll.* est isosceles. Quare (d) anguli ACE , AEC acuti. Ergo
 11. p. 32. l. 1. perpendicularis ad BF , ducta ex A centro, cadet inter (e) C
 (e) *Per coroll.* & E , puta in D . Erunt igitur tam AC , quam AE æquales
 3. p. 32. p. 1. perpendiculari AD , quod est absurdum, contra Coroll. 14.
 p. 32. l. 1.

Corollarium.

Fig. 17. Circuli qui habent centra in una recta, eamque secant in
 eodem puncto B , se mutuo in puncto illo B contingunt.
 Cæterum hæc propositio liquet etiam ex notione ipsa linea-
 rum, quæ comparantur. Neque enim aut recta linea & curva
 circuli peripheria, aut peripheriarum inæqualium diversæ
 curvaturæ, aut duæ convexæ, secundum ullam sui partem
 possunt congruere. Congruerent autem, si invicem in tota
 parte aliqua tangerent.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 18. **I**N circulo æquales rectæ (BC, LF) æqualiter a
 centro distant: & quæ distant a centro æquali-
 ter, sunt æquales.

Ex centro A ducantur AC , AF , item AO , AI ad angulos
 (f) *Per 3. l. 3.* rectos ipsis BC , FL . Erunt (f) BC , FL bisectæ in O & I .

Cum ergo totæ BC , FL ponantur æquales, etiam dimidiæ
 OC , IF , adeoque & quadrata ipsarum æquantur. Jam vero
 (g) *Per 47. l. 1.* quad. AC (g) æquale est quadratis OC , OA ; & quadratum
 AF æquatur quadratis IF , IA . Cum igitur quadrata AC ,
 AF æqualia sint, etiam duo quadrata OC , OA , duobus IF ,
 IA

IA æqualia erunt. Ablatis igitur quadratis OC, IF (quæ ante ostensa sunt æqualia,) quæ remanent, quad. OA, IA æqualia erunt. Ergo etiam perpendiculares OA, IA sunt æquales. Ergo BC, FL æquales, a centro distant (a) æqualiter. Quod (a) Per defn. 4. l. 3. erat primum.

E converso si distantie OA, IA ponantur æquales, tunc ablatis quadratis rectarum æqualium OA, IA, eodem discursu ostendetur quadrata reliqua OC, IF fore æqualia, ac proinde & rectas OC, IF æquales esse, quæ cum sint (b) (b) Per 3. l. 3. semisles rectarum BC, FL, etiam illæ æquales erunt. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XV.

Rectarum circulo inscriptarum maxima est diameter. Fig. 19.
Ceterarum ea major, quæ centro propior.

Sit quævis, RS alia à diametro FL. Ex centro duc AR, AS. Dux AR, AS æquantur diametro FL, & sunt (c) (c) Per 20. l. 1. majores quam RS. Ergo, &c.

Sit deinde BI propior centro quam XZ. Ex centro ad illas duc perpendiculares AC, AQ. Erit AQ (d) major quam AC. Accipe ergo AO parem AC, & per O duc RS perpendicularem ad AO, quæ (e) par erit BI; junganturque AR, AS, AX, AZ. Quia igitur A centrum est, erunt latera AR, AS æqualia lateribus AX, AZ. Angulus autem RAS, major est angulo XAZ. Ergo basis RS, hoc est BI, major (f) est basi XZ. Quod erat demonstrandum. (f) Per 24. l. 1.

PROPOSITIO XVI.

Recta (IF) quæ per (B) extremitatem diametri (CB) perpendicularis est, tota cadit extra circumulum, eumque tangit (in B.) Neque inter ipsam & circumulum alia recta ad contactum (B) duci potest, quin circumulum secet.

Pars 1. Accipiat in recta IBF quodvis punctum L, ad quod ex centro A duc rectam AL. In trigono LAB, quoniam angulus ABL rectus est per hyp. erit ALB (g) acutus. Ergo AL opposita majori angulo ABL, major est, (h) quam AB, quæ minori ALB opponitur. Sed AB tantum pertinet ad circumferentiam. Ergo AL ultra circumferentiam porrigitur, ac proinde punctum L, extra circumulum est. Tota igitur IF extra circumulum cadit. Quod erat primum.

E 4

Pars

Pars 2. Infra BF (si fieri potest) cadat RB tota extra circulum. Quoniam FBA rectus est per hyp. erit RBA acutus, ac proinde AB non est perpendicularis ad BR. Ducatur igitur ex A centro ad BR perpendicularis AO, quæ cadet (a) Per coroll. (a) versus R, & secabit circulum in Q. Igitur AB opposita majori angulo, nempe AOB recto, major est quam AO, quæ opponitur minori, nempe acuto OBA. Sed AB par est AQ: Ergo etiam AQ major est quam AO, pars toto.

Corollaria.

Fig. 20.

1. Hinc rursus patet contactum rectæ lineæ & circularis esse punctualem.

Fig. 17.

2. Si centris in eadem linea recta in infinitum protracta acceptis describantur per B infiniti circuli tam minores primo BSC, quam majores; omnes tangent rectam IF in eodem uno puncto B.

3. Circuli igitur in amplitudinem quacunq̃ue data majorem excrescentes, propius semper ac propius in infinitum tangenti appropinquant, nunquam tamen ei præterquam in unico contactus puncto, conjunguntur: quod quamvis evidentissimum sit, est tamen revera admirabile.

Fig. 17.

4. Ex his manifestum est, lineam quancunque in infinitum esse divisibilem. Ducatur enim ab aliquo diametri puncto ad tangentem recta AQ. Infiniti circuli centra habentes in recta BA sine termino producta, rectam IF per coroll. 2. hic, & se mutuo per coroll. p. 13. tangunt in uno eodemque puncto B, ac proinde nusquam vel inter se, vel cum recta IF conjunguntur præterquam in B. Ergo necesse est ut rectam AQ dirimant in partes infinitas, hoc est in non tot quin plures.

Fig. 20.

5. Angulum contingentiae seu contactus LBQ (eum nempe qui tangente & peripheria continetur) nulla recte linea potest dividere.

Fig. 17.

6. Per circumferentias tamen in eodem puncto tangentes secari potest ac minui in infinitum. Atque in hoc & tertio corollario latet totum mysterium asymptoticum, hoc est lineæ rectæ ad Hyperbolam una secum in infinitum productam, accedentis ad intervallum quocunque dato minus, nunquam tamen concurrentis: quod præclare observavit & demonstravit Marius Bettinus noster in Apiariis, & ante illum Barocius atque Cardanus ex Rabbi Moyse Narbonensi, cujus demonstrationem refert Cardanus de subtilitate, lib. 16.

Scho-

Scholium,

Demonstratur & solvitur fallacia paradoxorum,
quæ ex angulo contactus deduci solent.

A Tque hæc quidem ex 16. prop. hæcenus deducta, & mira & certa sunt. Quæ vero deduci ex eadem solent præterea, omnem captum humanæ mentis excedunt. Quare suspicari aliquando cœpi latere hic aliquid, cujus ignoratio subtilibus etiam ingeniis illuderet, & paradoxis illis immanibus asserendis ansam præberet. Et plane, quod suspicatus sum, ita se habere, mihi tandem videor deprehendisse. Paradoxa quæ ex 16. inferri solent, ex aliis multis, hæc fere præcipua sunt.

1. Angulus contingentæ (OAC) omni acuto minor est. *Fig. 21.*
Acutus esto PAC. Ab hoc auferri potest dimidius, & a residuo iterum dimidius, & sic deinceps sine termino. Quo pacto acutus fiet quocunque dato minor. Quamcumvis tamen in infinitum minuatur, semper tamen residui anguli, exempli gr. anguli QAC latus unum QA (a) intra circulum cadet, (a) Per 16, ac proinde angulus contactus OAC intra acutum continebitur, ejusque pars erit, ideoque illo minor.

2. Angulus semicirculi (BAO) licet recto minor sit, est omni acuto major. Quia ob eandem causam, acutus quantumvis magnus BAQ, intra semicirculi angulum BAO comprehenditur.

Hæc duo in ipso textu propositionis inferuntur. Quamvis nonnulli dubitent, Euclidis ea sint, an ab aliquo adjuncta. Apollonius certe, magnus Geometra, cum eandem affectionem in ellipsi, hyperbola & parabola demonstrat, has illationes prætermittit,

3. Angulus rectus CAB (imo acutus quicumque CAQ) continet infinitos æquales angulos contactus; ac proinde infinities illo est major. Nam angulus CAB dividi potest in acutos infinitos minores semper & minores, quorum nihilominus singuli sunt majores (b) angulo contactus OAC. (b) Per paradox. 1.

4. Angulus contactus CAO est vera pars anguli recti CAB; eundem quippe una cum semicirculi angulo OAB constituit: nequit tamen ulla sui multiplicatione suum totum adæquare: ac proinde hic infinita æqualia sibi addita non efficiunt infinitum.

5. Transitur a minori ad majus & per omnia media, neque tamen per æquale: sive datur majus aliquo, & datur eodem

dem minus, neque tamen datur eidem æquale. Nam si recta AB, fixo manente puncto A, moveatur, donec congruat cum tangente, describet acutos angulos BAP, BAQ, & omnes alios possibiles, qui quamvis semper augeantur, semper tamen erunt minores (a) semicirculi angulo BAO, quam primum vero AB congruet tangenti CA, immediate habetur rectus CAB major angulo semicirculi.

(a) Per parado-
xon. 2.

Hæc & plura alia ex hac 16. propositione deduci solent: quæ profecto, si ita, ut proponuntur, sese habeant, merito incomprehensibilia videri possent. Peletarius, ut his paradoxis se expediat, negat angulum contactus esse quantum. Rem confecerat, si dixisset nullum angulum esse quantum. Sed is vehementer errat, cum inde inferat omnes semicirculi angulos esse æquales, quod plane non inferret, si intelligeret, quod de contactus angulo asseverat, omnibus angulis convenire. Neque tamen Clavio nostro in sua illa adversus Peletarium apologetica disputatione assentior. Mea quidem sententia uterque fallitur, hic dum omnes omnino angulos esse putat quantitatem; ille dum omnes, præter angulum contingentie. Alii se existimant hac una responsione omnes difficultates solvere, si dicant, curvilineos angulos & rectilineos esse incomparabiles. Rogati vero, cur sint incomparabiles, respondent, quia angulus contactus quantumcumque multiplicatus nunquam potest æquare rectum vel acutum.

Atqui hoc est paradoxum omnium maximum, cujus explicatio petebatur, qui nimirum fieri possit, ut angulus contactus anguli recti pars sit, & tamen quotiescumque multiplicatus eundem superare nequeat. Respondent angulum contactus non esse partem recti, quia eum non potest adæquare. At paradoxorum assertores replicant, hinc solum sequi non esse partem recti aliquotam: veram tamen esse partem, eo quod cum semicirculi angulo rectum componat. Unde qui hac via difficultates propositas volebant dissolvere, debuerant ostendere angulum contactus nullo sensu partem esse rectilinei anguli, neque addito sibi semicirculi angulo rectum componere: id quod facturi deinceps nos sumus.

Def. 8. l. 1.

Mihi videtur res omnis ex Euclideâ definitione anguli pendere. Hæc enim, si penitus expendatur, manifeste docet nullum angulum esse quantum, quo uno errore sublato, paradoxa omnia evanescunt. Sentio igitur:

1. Nullus angulus est quantitas, sed modus quantitatis. Sic enim habet definitio 8. l. 1. Angulus planus est duarum linearum &c. alterius ad alteram inclinatio. Atqui linearum inclinatio non est quantitas, sed modus quantitatis. Cum enim curvitas non sit quantitas, cur inclinatio sit, quæ ab illa non

magis

magis differt, quam inflexio & fractio? Deinde, Si angulus esset quantus, foret vel linea, vel superficies, vel corpus. Non esse lineam aut corpus patet. Sed neque superficies est, ea enim ablatione partium C, B, minuitur; non angulus. Neque *Fig. 22.* potest dici angulum esse superficiem indeterminatam, cum angulus quilibet determinatus sit.

2. Quoniam anguli non sunt quantitas, sed modus quanti, eorum inter se comparatorum relatio, non est æqualitas & inæqualitas, sed similitudo & dissimilitudo.

3. Cum igitur anguli inter se comparati æquales dicuntur aut inæquales, non aliud intelligi potest, quam eos similes esse inter se aut dissimiles. Maluit tamen Euclides æquales & inæquales dicere ob multas horum terminorum in angulis rectilincis commoditates. Quem proinde loquendi modum etiam nos retinebimus.

4. Similes porro anguli sunt, quorum ambo latera superimposita congruunt. Dissimiles quorum non congruunt latera. Angulus enim nihil est aliud, quam inclinatio linearum, alterius ad alteram. Ergo similes anguli sunt inclinationes linearum similes. Non sunt autem inclinationes linearum similes, nisi ambæ sibi mutuo impositæ congruant. Ergo similes anguli sunt, quorum congruunt latera; dissimiles, quorum non congruunt.

5. Itaque manifestum est nullum angulum curvilineum æqualem dari posse ulli angulo rectilineo. Nam æqualitas angulorum non aliud est quam similitudo, per conclus. 2. & 3. Similitudo angulorum est sola laterum congruentia per conclusion. 4. Laterum congruentia haberi nequit, dum angulus curvilineus imponitur rectilineo. Ergo &c. Errat igitur Proclus dum descriptis æqualibus semicirculis ita ratiocinatur: æqualium semicirculorum anguli EAD, CAB æquales *Fig. 23.* sunt. Ergo si his addatur communis angulus CAD, erit angulus EAC curvilineus æqualis rectilineo DAB. Fallitne ergo axioma, si æqualibus addas, vel demas æqualia, tota, vel reliqua erunt æqualia? Nequaquam: hoc enim ad res quantas solum pertinet: anguli porro quanti non sunt. Axioma ut in angulis valeat, ita formari ac intelligi debet. Similes anguli, si opponantur similibus angulis, similiterque posit; qui tum orientur, erunt similes. At Proclus comparat angulos similes quidem: sed communis, qui utrisque additur, cum ab una parte habeat latus rectum, ab altera curvum, dissimiliter utrisque additur.

6. Quare cum tota essentia anguli sit linearum se tangentium inclinatio, non erit unus angulus pars alterius, una siquidem inclinatio pars alterius inclinationis non est: neque
angulus

angulus auferri ab angulo poterit; inclinatio siquidem una auferri nequit ab altera, &c. Hæc enim non laterum inclinationibus, quæ quantitas non sunt, sed superficiebus inter latera constitutis conveniunt.

Fig. 24.

Fig. 24. &
25.

7. Postremo ex jam dictis colligemus, quomodo intelligi debeant illæ locutionum formæ, quibus Geometræ passim, atque ipse inprimis Euclides, utuntur, cum angulos secari, augeri, imminui, alterum alterius duplum, triplum, aliaque similia asserunt. Hæc sane existimabimus eos non proprie, sed analogice tantum angulis tribuere; itaque eos loqui voluisse, quod id commodius, & expeditius esset, neque tamen obnoxium periculo, modo in angulis rectilineis maneat. Angulum itaque dividi recta DA , non aliud erit, quam inter latera EA , CA aliam interponi lineam, quæ novas duas cum utroque latere inclinationes, hoc est duos novos angulos efficiat. Angulum vero EAC esse duplum anguli EAD , nihil rursus aliud erit, quam inter lineas rectas EA , CA , aliam interponi, quæ ad utramque similiter inclinetur, unde fiat ut rectæ EA , DA rectis CA , DA , inclinationibus non mutatis, impositæ congruant. Quod si ita ratiocinentur: (Angulus EAD est æqualis angulo ILQ , & DAC est æqualis QLR . Ergo totus EAC toti ILR æqualis est.) Idem erit, ac si dicatur; inclinatio rectarum EAD similis, seu eadem est inclinationi rectarum ILQ ; & inclinatio rectarum DAC similis est inclinationi rectarum QLR . Ergo etiam inclinatio rectarum EAC similis erit inclinationi rectarum ILR . Vel certe (quod recidet in idem, ex assertione 4, supra) collectionem illam sic intellige: latera EAD congruunt lateribus ILQ ; & latera DAC congruunt lateribus QLR . Ergo latera quoque EAC congruent lateribus ILR . Quæ quidem consecutio æque clara est, atque si æqualibus addas æqualia, tota æqualia esse. Ad eum modum locutiones cæteras, quæ, cum sint quantis propriæ, ad angulos transferuntur, facile, veritate theorematum ubique salva, interpretabimur.

His ita constitutis, facile paradoxa angularia dissolvemus; quæ sane non aliunde enata sunt, quam quod angulos eodem, quo cæteras quantitates, habuerint loco. Ut igitur simul omnia expediam, Dico paradoxa illa, si in proprio verborum sensu accipiantur, ad unum omnia esse falsa. Sic enim accepta non convenient nisi quanto: anguli autem quanti non sunt, ut jam ostendimus.

Itaque angulus contactus neque minor est quovis acuto, neque pars est anguli rectilinei, neque in rectilineo continetur infinites, imo ne semel quidem; nihil enim horum, linea-
rum

rum inclinationi potest competere, quæ tota anguli essentia est. Si vero non proprie, sed analogice accipiantur, jam nihil continent, quod a communi sensu, ac ratione alienum sit. Sic enim angulum contactus OAC esse minorem quo- Fig. 21.
vis acuto, & semicirculi angulum OAB acuto omni majorem, non aliud significabit, quam infra tangentem CA , nullam posse duci rectam ad contactum, quin secet peripheriam. Quæ quidem circuli proprietas est omnino digna, quam homines admirentur, est tamen ejusmodi quam possimus intelligere, & quæ nihil cum ratione pugnant involvat. Non alius paradoxo tertii, quarti & quinti sensus erit. Atque ita unius Euclidæ definitionis ductu, rite perspecta natura anguli, omnes immanium paradoxorum tenebræ evanescunt.

[Sed, ut opinor, hanc de angulo contactus questionem longe accuratius tractat Celeberrimus Wallisus, Op. Vol. 2. P. 605. &c. Quo itaque Lector qui hisce oblectatur est remittendus.]

PROPOSITIO XVII.

A Puncto dato (B) rectam ducere, quæ datum Fig. 26.
circulum (OQ) tangat.

Ex A dati circuli centro ducatur ad datum punctum B recta AB , secans peripheriam in O . Centro A describe per B alium circulum, BC , & ex O duc OC perpendicularem ad AB , quæ occurrat circulo BC in C . Duc CA , occurrentem circulo OQ in I . Ex B ad I ducta recta tanget circulum OQ .

Quia latera BA , IA , æquantur lateribus CA , OA , angulusque A communis est in trigonis IAB , OAC , etiam (a) an- (a) Per 4. L. 1.
guli AOC , AIB æquales sunt. Sed (b) AOC rectus est. (b) Per constr.
Ergo etiam rectus est AIB . Ergo BI (c) tangit in I . (c) Per 16.
L. 3.

Scholium.

EX 31. seq. pulchre ex dato puncto (O) ducitur tangens Fig. 27.
circulum datum (BQ .)

Centrum A & datum punctum O jungens recta bisecetur in P . Tum centro P , per A & O describe circulum occurrentem dato in B . Recta OB tanget.

Nam juncta AB , angulus ABO in semicirculo rectus est per 31. ergo per 16. OB tangit circulum BQ .

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 28.

SI circulum tangat recta linea (CL,) qua ex centro (A) ad contactum (B) ducitur, tangenti perpendicularis est.

Si negas, fit ex A centro perpendicularis, alia quædam recta AF: (a) secabit ea circulum in O. Quia ergo angulus APB rectus ponitur, erit (b) ABF acutus. Ergo AB, (hoc est AO) major (c) quam AF, pars toto.

(a) Per 1. part. p. 16. l. 3.
(b) Per coroll. 5. p. 32. l. 1.
(c) Per 19. l. 1.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 29.

SI recta (BC) circulum tangat, & ex contactu (A) tangenti perpendicularis excutetur (AI,) erit in ea centrum.

Si negas, fit centrum extra AI in Z, & ab eo ad contactum ducatur ZA. Erit (a) angulus ZAC rectus, ac proinde par angulo IAC, per hypoth. recto; hoc est pars toti

(a) Per prop.

PROPOSITIO XX.

Fig. 30, 31, 32.

Angulus ad centrum (BAC) duplus est angulo (BFC) ad peripheriam, cum idem arcus (BC) est basis angularum.

Fig. 30.

Triplex est casus. In primo, latera BA, BF coincidunt. Tum vero quia AF, AC ex centro ductæ æquantur, erunt in triangulo Z anguli F & C (a) æquales. Sed BAC (b) æqualis est duobus F & C. Ergo BAC duplus est unius F.

Fig. 31.

In casu secundo BA, CA cadunt intra BF, CF. Tum vero ducta FAX, per casum primum XAB est duplus XFB, & XAC duplus XFC. Ergo totus BAC duplus est totius BFC.

Fig. 32.

In tertio casu BF secat AC, & anguli BAC, BFC sunt extra invicem. Ducatur FAL. Per casum 1. totus LAC duplus est totus LFC, & ablati LAB duplus est ablati LFB. Ergo & reliquus BAC duplus est reliqui BFC. Quod erat demonstrandum.

Fig. 33.

[Corollarium. Hinc colligimus cujuscunque Trianguli latera esse inter se ut Sinus Angulorum lateribus respective oppositorum.

* Per 5. l. 4. Sit EFG triangulum quodcunque; circa quod circulus * circumscriptus intelligatur. Et à centro circuli demittantur perpen-

† Per 3. l. 3. diculares AB, AC, AD, qua subtensas † bifariam dividunt.

Est

Est ut EF ad EG, ita $\frac{1}{2}$ EF (hoc est EB) ad $\frac{1}{2}$ EG (hoc est ED.) Sed EB est $\frac{1}{2}$ sinus anguli BAE, hoc est dimidii anguli EAF, hoc est anguli integri EGF, lateri EF oppositi; ED est sinus anguli EAD, hoc est dimidii anguli EAG, hoc est integri anguli EFG, lateri EG oppositi. Est ergo EF ad EG, ut sinus anguli EGF ad sinum anguli EFG. Q. E. D.
 Et ab hac unica propositione magna pars trigonometria plana deducitur: Quod diligenter est notandum.

Coroll. (2.) E priori Corollario Luna distantiam metiri discimus: data enim per observationes Astronomicas * Parallaxeos * Coroll. 16. diurna anguli BCA, Luna distantiam sequenti analogia investigamus. Ut sinus anguli ACB, ad sinum anguli CBA: ita BA Telluris semidiameter, ad AC distantiam Lunae. Q. E. I.

Coroll. (3.) E Corollario secundo Solis etiam distantiam metiri discimus. Dato enim per observationes Astronomicas parallaxeos menstrua angulo, ubi scilicet Luna precise bisecta appareat ZEO, Luna distantia ZO; per analogiam sequentem distantiam Solis colligimus. Ut Sinus anguli ZEO, ad sinum anguli EOZ sive radium: ita ZO, distantia Luna, ad ZE distantiam Solis. Q. E. I.]

PROPOSITIO XXI.

Anguli (BOC, BFC,) qui in circulo, insistant eidem arcui (BOC,) sive qui in eodem segmento (BQSC) existunt, inter se omnes sunt aequales. Fig. 33.

Sit primo segmentum BQSC majus semicirculo. Ex centro A duc AB, AC. Per præced. angulus BAC ad centrum, duplus est singulorum BQC, BFC. Ergo omnes BQC, BFC sunt (a) æquales. Quod erat demonstrandum. (a) Per axi.

Sit deinde segmentum BQC æquale aut minus semicirculo. In triangulis BQI & CFI, quia anguli ad verticem I oppositi, (b) æquales sunt, etiam summa reliquorum Q & R summa reliquorum F & O (c) æqualis erit. Quare si ab his æqualibus summis auferantur anguli R & O qui per primam partem æquales sunt, utpote eidem arcui QF insistentes, qui remanent Q, F, æquales erunt. Quod erat demonstrandum. Fig. 34.

Coroll. Hinc colligunt Optici lineam quamvis BC oculo ubi-
 vis in circuli, cujus chorda est, circumferentia posito ejusdem
 magnitudinis apparere; quia scilicet sub angulo equali BQC
 ubique apparet.

[Schol. Si duorum angulorum equalium, eidem arcui insistentium, unus sit ad peripheriam; erit etiam alter ad peripheriam.

Fig. 33, 34. Si negas; angulo ad peripheriam BQC aequalis erit, vel angulus BIC citra peripheriam QF , vel angulus BEC ultra
 * Per Cor. 1. eandem peripheriam QF . Sed angulus BIC est * major, &
 p. 32. l. 1. BEC † minor angulo BQC : Ergo, &c.]
 † Per cor. id.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 35.

Quadrilateri circulo incripti ($ABCF$) oppositi anguli duos rectos faciunt.

Ducantur BF , CA . Angulus ABC , cum duobus O & X facit (a) duos rectos. Sed O est (b) æqualis I , quia insunt eidem arcui BC ; & X (c) est æqualis Z , quia insunt eidem arcui AB . Ergo ABC , cum duobus etiam, I , Z , hoc
 (a) Per 32. l. 1.
 (b) Per 21. l. 3.
 (c) Per eand. est cum toto opposito angulo AFC , facit duos rectos. Quod erat demonstrandum.

Coroll. (1.) [Hinc si unum latus quadrilateri in circulo describitur, erit angulus externus aequalis angulo quadrilateri opposito: internus enim utriusvis additus duos rectos angulos conficit.]

(2.) Item circa Rhombum circulus describi nequit; quia aduersi ejus anguli vel cedunt duobus rectis, vel eos excedunt.

(3.) Item si in quadrilatero quouis $ABCF$, anguli oppositi F & B duobus rectis æquantur, circa illud circulus describi potest.

* Per p. 5. l. 4. test. Nam circulus per quoslibet * tres angulos CFA transibit.

† Per 22. l. 3. & † ita ut quartus sit angulo B æqualis: Quod fieri nequit, nisi

* Per Schol. per punctum B * transseat. Transsit ergo per B .]
 post p. 21. l. 3.

PROPOSITIO XXIII. & XXIV.

Non sunt necessaria: & agitur de segmentis similibus, quæ non possunt sine proportionibus recte definiri.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 36.

Datum arcum (ABC) perficere.

Subtendantur utcumque duæ rectæ AB , CB , quas biseca in I & L . Ex I & L duc perpendiculares sibi occurrentes in puncto O . Hoc erit centrum circuli, cujus portio est arcus ABC .

(d) Per corol. Nam (d) centrum est & in recta IX , & in recta LZ . Ergo in communi ipsis puncto O .

Fig. 36.

Praxis. Centro B sumpto in arcu, describe circulum, eodemque intervallo, aliis in arcu centris, describe duos alios circulos quorum singuli priorem bis secant. Per intersectiones ductæ rectæ sibi mutuo occurrentes in O dabunt centrum.

PRO.

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

IN circulis equalibus, rectæ æquales (CE, FI) sub- Fig. 37.
tendunt arcus æquales; & si arcus sunt æquales,
etiam subtensa æquales erunt.

1. Pars. Ad centra A & B ducantur CA, EA, FB, IB.
Quia triangula CAE, FBI, sibi mutuo æquilatera sunt, etiam
erunt sibi mutuo (a) æquiangula. Ergo cum circuli sibi mu- (a) Per 8. l. 1.
tuo imponentur, triangulum FBI congruere poterit triangu-
lo CAE, ac proinde centrum B incidet in centrum A, & pun-
cta F, I, in puncta C, E. Cum igitur circuli sint æquales, etiam
arcus FLI necessario congruet arcui CQE, & arcus FOI ar-
cui CSE, ac proinde æquales (b) erunt etiam ipsi. (b) Per ant. 7.

Pars 2. Quoniam circulorum æqualium arcus FLI, CQE
ponuntur æquales, sibi mutuo impositi congruent, punctaque
F, I incident in puncta C, E. Ergo & subtensa FI congruet
subtensa CE. Ergo FI, CE (c) æquales sunt. (c) Per ang. 7.

[Corollarium (1.) Si in circulo ABCD sit arcus AB par 7.
arcti DC, erit AD parallela BC. Nam ducta AC, erit an- Fig. 55.
gulus ACB aqualis angulo CAD: quare AD * est parallela * Per 27. l. 1.
BC. Q. E. D.]

Coroll. (2.) Linea recta EF qua ducta ex A medio puncto Fig. 56.
peripheria alicujus BC circulum tangit, parallela est recta linea
BC qua peripheriam illam subtendit: Duc enim e centro D ad
contactum A rectam DA, & connecte DB, DC. Latus DG
commune est, & DB aqualè DC, atque angulus BDA aqua-
lè angulo CDA; (ob arcus BA, CA æquales.) Ergo anguli
* DGB, DGC æquales, & proinde recti sunt. Sed interni an- * Per 4. l. 1.
guli + GAE, GAF etiam recti sunt, Ergo * BC; EF sunt pa- + Per 18. l. 3.
rallela. Q. E. D.] * Per 28. l. 1.

PROPOSITIO XXVIII. & XXIX.

SI in circulis equalibus, anguli sive ad centra (BAC, Fig. 38.
FLI) sive ad ambitum (BOG, FSI) sint æ-
quales, etiam arcus (BXC, FZI) quibus insistant,
sunt æquales: & si arcus sunt æquales, etiam anguli
æquales erunt.

Pars 1. Quoniam latera AB, AC æquantur LF, LI, (sunt
enim æqualium circulorum semidiametri,) & anguli A, L po-
nuntur æquales; erunt bases (d) BC, FI æquales. Ergo arc- (d) Per 4. l. 1.
cus BXC, FZI etiam (e) æquales sunt. (e) Per 28. l. 1.

F

Ponantur

Ponantur jam anguli BOC , FSI ad ambitum æquales.
 (a) Per 20. Quia igitur (a) horum dupli sunt BAC , FLI , etiam illi
 l. 3. æquales erunt, ac proinde, ut jam ostensum, etiam arcus
 BXC , FZI sunt æquales.

Pars 2. Ex æqualitate arcuum BXC , FZI habetur per
 27. æqualitas subtensarum BC , FI . Ergo, quia etiam BA ,
 (b) Per 8. l. 1. AC æquantur ipsis FL , LI , erunt (b) anguli A & L ad
 (c) Per 20. centrum æquales: & quia (c) anguli O & S horum dimidii
 l. 3. sunt, erunt etiam ipsi æquales.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 39.

Datum arcum (ABC) bisecare.

Duc AC , quam biseca in O . Ex O perpendicularem duc
 OB , occurrentem arcui in B . Dico factum.

Jungantur enim AB , CB . Latera AO , OB per constr.
 æquantur lateribus CO , OB ; & anguli ad O sunt æquales.
 (d) Per 4. l. 1. quia recti. Ergo bases AB , BC (d) æquales. Ergo etiam
 (e) Per 26. (e) æquantur arcus AB , CB .

Praxis. Centris A & C describe pari intervallo arcus se
 Fig. 39. secantes in punctis F & I , per quæ ducta recta arcum
 ABC bisecabit.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 40.

Angulus (BCF) in semicirculo, rectus est: in
 segmento majore minor recto; in segmento mi-
 nore recto major.

1. Pars. Ex centro A duc AC . Quia æquales sunt AB ,
 (f) Per 5. l. 1. AC , anguli O , B (f) æquales erunt. Ob eandem causam
 æquales erunt I , F . Ergo totus BCF utrique B & F æqua-
 (g) Per 32. lis est. Cum igitur (g) tres simul conficiant duos rectos,
 l. 1. semissis trium, angulus BCF , unus rectus est.

Fig. 41.

2. Pars. Sit segmentum $LOBF$ semicirculo LOB majus,
 in eoque FOL angulus, & ducatur OB . Angulus FOL
 minor est angulo BOL , qui per 1. partem rectus est. Ergo &c.

Fig. 41.

3. Pars. Esto segmentum LOX semicirculo LOB minus,
 in eoque angulus XOL . Erit hic major quam BOL , qui
 rectus est. Ergo &c.

Fig. 40.

Corollarium. Hinc Examen Norma, num exacte rectangula
 sit, instituitur. In circulo enim quocunque, posito ad circum-
 ferentia punctum quodcunque C Norma vertice, si latera per dia-
 metri puncta B & F transeunt, Angulus est rectus: Sin minus,
 quadquaquam. (2. Si

(2.) [Si normis latera ad puncta B & F continio adijuncta tenentur in eadem datu angulus utrinque circumagatur, Vertex anguli C describet circumferentiam circuli cujus diameter est linea BF.]

(3.) Hinc ab extrema linea perpendicularem excitare discimus. Sit BC linea a cujus puncto C perpendicularem oporteat excitare. A puncto quovis A tanquam centro describatur circulus, per punctum C transiens, & lineam BC interfecans in puncto B. Data diametro BF, liquet lineam CF esse lineam BC normalem. Q. E. F.

(4.) [Hinc colligimus circulos se invicem interius contingentes, Fig. 57: lineas omnes ut AD proportionaliter secare; ita ut sit AE subtensa minoris ad AD subtensam majoris, ut AG diameter minoris ad AB diametrum majoris. Ductis enim CE, BD. subtenfis, Triangula EAC, DAB sunt aequiangula. Angulus enim ad A est utrique communis, & anguli AEC, ADB sunt aequales, utpote recti in semicirculis: & proinde Anguli ACE, ABD aequales sunt. Est ergo in triangulis & similibus AC:AB::AE:AD. Q. E. D.

(5.) In Triangulo rectangulo ECF, si hypotenusa BE bisectetur in A, recta AC secabit triangulum in duo triangula aequicrura ACB, ACF: Et circulus centro A per B descriptus transibit per C, anguli recti verticem.] Fig. 42.

PROPOSITIO XXXII.

SI recta (CF) circulum tangat, & alia ex contactu ducta (AB) eundem secet, erit angulus a tangente & secante factus, par angulo, qui fit in segmento altero. Fig. 42.

Nimirum angulus CAB erit par angulo L, qui fit in segmento ALQB, & angulus FAB par angulo O, qui fit in segmento AOB.

Transcat primo secans AB per centrum. Per 18. CAB rectus est. Et per 31. rectus est L. Ergo CAB & L aequales sunt. Fig. 42.

Transcat deinde secans AB non per centrum. Ducatur igitur per centrum recta AQ, & jungatur BQ. Quia ABQ in semicirculo rectus est, faciet BQA cum BAQ rectum unum. Sed etiam CAQ rectus est. Ergo BQA cum BAQ aequatur CAO. Ablato igitur communi BAQ, erit BQA hoc est aequalis CAB. Quod erat primum.

Deinde (d) FAB, CAB faciunt duos rectos; & in quadrilatero BOAL, (e) oppositi L & O etiam faciunt duos rectos.

rectos. Ergo duo FAB, CAB æquantur duobus simul O & L. Ablatis ergo hinc quidem CAB, inde L, quos jam ostendi æquales, erunt æquales reliqui FAB & O. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 44.

Super data recta (BC) segmentum circuli construere, capiens angulum dato parem.

- Si detur angulus acutus ABF, ex B duc BL perpendicularem ad AB, & ad terminum C datæ rectæ BC, fac angulo
 (a) *Per 23. l. 1.* CBL parem (a) BCI, cujus latus secabit BL in I. Centro I per B describe circulum; hic transibit per C, (quia ob æqualitatem angulorum ad C & B, etiam latera CI, BI
 (b) *Per 6. l. 1.* (b) æqualia sunt,) capietque segmentum BQC angulum parem dato ABF.

Nam quia AB diametro BL perpendicularis est, AB tanget (c) circulum, quem secat BC. Ergo (d) angulus in segmento BQC, sequatur angulo ABF.

(c) *Per 18. l. 3.*
 (d) *Per præc.* Quod si detur angulus obtusus RBC, eadem construeturque segmentum COB quæsitum.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 45.

A dato circulo segmentum auferre capiens angulum dato parem.

- Ad circuli diametrum FA duc perpendicularem BAL; ducatur item AC, (e) quæ faciat angulum BAC parem dato. Hæc auferet segmentum AQC capiens angulum parem dato; uti patet ex 32.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 46, 47.

SI in circulo due rectæ (CL, BF) se secuerint, rectangulum (COL) sub segmentis unius, æquale est rectangulo (BOF) sub segmentis alterius comprehenso.

Fig. 46.

Si se interfecant in centro A, res patet.

- Si una CL transit per centrum A, & reliquam BF secat
 (f) *per 3. l. 3.* bifariam; secabit quoque (f) perpendiculariter, ac proinde quad. FO est rectangulum FOB. Ducatur AF. Quoniam CL bisecta est in A, & aliter in O, erit

rect.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{rect. COL.} \\ \text{quad. AO} \end{array} \right. \text{ a. (a) quad. AL; hoc est}$

(a) Per 5. l. 2.

quad. AF; hoc est (b)

(b) Per 47.

quad. AO

quad. FO

Dempto igitur communi quadrato AO, erit

rect. COL. a. quad. FO, hoc est

rect. FOB.

Si una CL per centrum transit, & reliquam BF secat Fig. 47.
inæqualiter in O, ex centro A ducta recta secet ipsam BF in
I bifariam. Igitur angulus AIB (c) rectus erit. Jam quia (c) Per 3. l. 3
CL bisecta est in A & aliter in O, erit

$\left\{ \begin{array}{l} \text{rect. COL,} \\ \text{cum} \\ \text{quad. AO} \end{array} \right. \text{ a. (d) quad. AL; hoc est}$

(d) Per 5. l. 2.

quad. AB; hoc est (e)

(e) Per 47.

quad. AI

quad. BI

Sed quadratum AO æquatur (f) quadratis OI, AI. Ergo (f) Per 1. l. 2.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{rectang. COL.} \\ \text{quad. OI} \\ \text{quad. AI} \end{array} \right. \text{ a. quad. AI;}$

quad. BI.

Dempto igitur communi quadrato AI, remanent

$\left\{ \begin{array}{l} \text{rect. COL.} \\ \text{quad. OI.} \end{array} \right. \text{ a. quad. BI.}$

Atqui etiam quadratum BI æquatur rectangulo (g) FOB (g) Per 5. l. 2.
cum quadrato OI, quia FB secata est bifariam in & I ali-
ter in O. Ergo

$\left\{ \begin{array}{l} \text{rectang. COL.} \\ \text{quad. OI} \end{array} \right. \text{ a. rect. FOB;}$

quad. OI.

Dempto igitur communi quadrato OI, erit

rect. COL. a. rect. FOB.

Quod si neutra rectarum CL, FB per centrum transeat, Fig. 48.
per communem earum sectionem O per centrum A, ducatur
recta XZ. Per modo demonstrata tam rectang. COL quam
rectang. FOB æquatur rectangulo ZOZ. Ergo etiam
COL, FOB æqualia sunt inter se.

[Vel sic facilius & universalius. Connecte AC & BD. At- Fig. 38.
que ob angulos CEA, * DEB ad verticem oppositos, ipsosque * per 15. l. 1.
† C & B (super eodem arcu AD) pares, trigona CEA, BED † per 21. l. 3.
* æquiangula sunt. Ergo † CE : EA :: EB : ED. Proinde * per Cor. 9.
* rectangulum GE × ED æquale est rectangulo EA × EB. † per 4. l. 6.
Q. E. D.] * per 16. l. 6.

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 49, 50, 51.

Si a puncto (B) extra circulum dato ducantur
 dua recte, una tangens (BF,) altera secans (BC;)
 erit rectangulum (CBO) sub toto secante (CB)
 & parte (BO) inter punctum & circulum inter-
 jecta comprehensum, aequale quadrato tangenti
 (BF.)

Fig. 49.

Si secans BC transit per centrum A, iungat AL, faciet hoc
 (a) Per 18. (a) cum FB angulum rectum. Quoniam CO bisecta est in
 A, etque adjecta OB, erit

(b) Per 6. l. 2.

(c) Per 47.

l. 1.

$$\begin{cases} \text{rect. CBO,} & (b) \text{ a. quad. AB, hoc est (c)} \\ \text{quad. AO} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{quad. BF} \\ \text{quad. AF} \end{cases}$$

Ablatis, ergo quadratis AO, AF equalibus, remanet
 rect. CBO. a. quad. BF.

Fig. 50, 51.

Quod si CB non transit per centrum A, ducatur AL
 AF, AO, & AL ex centro ducta bisecet OC in L. Er-
 (d) Per 3. l. 3. angulus ALO (d) rectus erit. Item AF (e) erit rectus
 (e) Per 18. l. 3. Quoniam vero CO bisecta est in L, etque adjecta est OB,
 erit

(f) Per 6. l. 2.

$$\begin{cases} \text{rect. CBO,} & (f) \text{ a. quad. LB} \\ \text{quad. LO} \end{cases}$$

Addatur utrinque quadratum AL, erit

$$\begin{cases} \text{rect. CBO.} & \text{a. quad. LB} \\ \text{quad. LO.} & \text{quad. AL} \\ \text{quad. AL.} \end{cases}$$

(g) per 47. Sed quadrata LO, AL aequantur quadrato (g) AO seu AF;
 l. 1. & quadrata LB, AL (h) aequantur quadrato AB. Ergo

(h) per eand.

(i) per eand.

$$\begin{cases} \text{rect. CBO.} & \text{a. quad. AB, hoc est (i)} \\ \text{quad. AF} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{quad. BF} \\ \text{quad. AF} \end{cases}$$

Ablato igitur communi quadrato AF, remanet
 rect. CBO. a. quad. BF.

[Ita sic facilius & universalius. Duc AB & BC, ac ob
 Fig. 50. angulos A & DBC pares, & D communem, triangula BDC,
 Per 19. l. 3. ADB & BDC pares, & D communem, triangula BDC,
 & ADB & BDC pares, & D communem, triangula BDC,
 2. 32. l. 1. Quare & rectangulum AD & DC aequale est quadrato DB.
 * per 4. l. 6. Q.E.D.]

Corolla.

Corollaria.

1. SI ab eodem extra circulum puncto B, quotvis ducantur Fig. 52.
secantes BC; omnia rectangula CBO inter se æqualia
sunt. Singula enim æquantur quadrato tangentis BF.

2. Quæ ex eodem puncto circulum tangunt, BF, BQ
æquales sunt. Earum quippe quadrata æquantur singula ei-
dem rectangulo CBO.

3. [Perspicuum quoque est ab eodem puncto B extra circulum
assumpto, duci tantum posse duas lineas BF, BQ, quæ circulo
tangant. Nam si tertia tangere dicatur, erit illa BF &
BQ æqualis, & proinde ab una istarum non diversa.

4. In omni triangulo rectangulo BFA, Rectangulum ex Fig. 49.
hypotenusa & lateris cuius summa, ac differentia, æquatur
quadrato lateris alterius. Nam hypotenusa BA & lateris
AF seu AC summa, est BC. Et eorundem differentia
est BA - AF = BA - AO = BO. Et trianguli la-
tus alterum est BF. Sed rectang. CBO æquatur quadrato
BE. Ergo, &c.]

PROPOSITIO XXXVII.

SI rectangulum sub CB & OB sit æquale qua-
drato BF, hæc circulum tanget in F. Fig. 53.

Ex B ducatur tangens BQ, & ex E centro ductis ad Q
& F rectis EQ, EF, jungatur BE. Quoniam rectangulo
CBO æquantur quadratum BF per hyp. & quadratum BQ
per 36. hæc inter se æqualia sunt; adeoque & rectæ BQ, BF
æquales. Igitur triangula FEB, QEB sibi mutuo sunt æqui-
latera. Ergo (a) anguli Q, F æquales erunt. Sed Q (b) re-
ctus est. Ergo etiam F rectus est. Ergo BF (c) tangit. (a) Per 8. L1.
(b) Per 18.
(c) Per 16. L3.

[Coroll. 1. Hinc angulus (d) EBF æqualis est angulo EBQ. (d) Per 8. L1.

2. Si dua rectæ æquales BF, BQ ex puncto quopiam B in (d) Per 8. L1.
convexam peripheriam incidant, & earum una BF circulum
tangat, altera quoque BQ eundem circulum tanget. Nam
cum BF, BQ sint æquales, earum quadrata erunt æqualia.
Sed BFq = (e) CBO. Ergo BQq = (f) CBO. Ergo (g) per præc.
etiam BQ (g) tangit circulum. (e) Per præc.
(f) Per antea.
(g) Per hæc

Scholium. (1.) Cum plana per centrum terra transeuntia, pr.
in quibus omnia ad horizontem recta consistant, circulos magnos
& æquales in terra superficie generent, lausa nonnulla conse-
claria ex authore nostro in Astronomia sua apponemus; quæ
circularum natura facillime possunt intelligi.

(1.) Si qua sui parte superficies terra esset perfecta plana, non magis possent homines in ea recti consistere quam in cliyo montis: excepto nimirum contactus puncto.

(2.) Caput viatoris plus itineris conficit quam pedes: item qui eques eandem viam proficiscitur plus quam qui pedes. Item in na- vi, pars suprema mali plus via percurrit quam inferior.

(3.) Si quis totum orbis circumductum peragisset, iter ejus a capite confectum superaret iter confectum a pedibus periph- riarum differentia, qua aequalis est circumductui circuli cujus radius est ipsa hominis statura.

(4.) Vas aqua plenum si ad perpendicularum efferatur in altum, continuo aliquid ex eo effluit, & tamen manebit plenum: quia, scilicet, superficies aqua in partem majoris sphaera continuo com- primetur. Imo si vas in altum fine termino efferatur, super- ficies aqua in eo contenta descendens fine termino versus planum per margines ductam, nequa tamen unquam ad planum istud perveniet.

(5.) Si vas aqua plenum recta deorsum feratur, quantumvis nubi effluat, tamen desinet esse plenum: quia scilicet aqua superficies in partem minoris sphaera continuo compressa. Ex quo sequitur.

(6.) Unum idemque vas plus aqua continet in pede mo- tis quam vertice, plus etiam in colla subterranea quam in cu- biculo. Quibus addo.

(7.) Duo funiculus, de quibus duo globuli ferret in perpen- diculo penduli sunt. Et proinde easdemque muris juxta per- pendicula erecta, non esse inter se parallelos: sed partes radii- rum terrae, in centro concurrentium.

Fig. 60.

Scholium. (1.) Problema etiam hoc ab Amico communi- catum. Et a me breviter paulo demonstratum hic loci inferere con- gruet. Per duo puncta B, C in circulo dato FDM, circun- ferentiam circuli ducere qua duo circuli circumferentiarum abob- dat bifariam. Per centrum A & unum e punctis datis B du- catur recta BAME infinita; ad quam e centro erigatur per- pendicularis AD, & ducatur BD. Ad BD fiat normalis DE, intersectans lineam infinitam BAME in puncto E. De-

(a) Per 3. 1. 4. nique circulus ducatur per (a) tria puncta B, C, E. Dico factum. Ducatur etiam circuli secundi chorda per G alteram periph- riarum intersectionem, & A centrum primi circuli, nimirum G Af. Ducatur etiam circuli primi diameter GAF. Erit in

(b) Per cor. 1. circuli primi, (b) $AB \times AE = ADq$; id est, (ob aequales ra- p. 3. 1. 6. & dios AG, AF) $= AG \times AF$. Et in circulo secundo erit

(c) $AB \times AE = AG \times Af$. Ergo $AF = Af$: & puncta F f coincident: atque arcus FDG = arcui FMG. Q.E.D.]

ELE.

lu-
ar-
ulu
De-
m.
be-
um
in
ra-
m
F
E

1		2		LIBER QVARTVS		5		6		7		Tabula . 3 .	
3		4		5		6		7		8		9	
10		11		12		13		14		15		16	
1		2		3		LIBER QVINTVS		5		6		7	
8		9		10		11		12		13		14	
15		16		17		18		19		20		21	
22		23		24		25		26		27		28	
29		30		31		32		33		34		35	
36		37		38		39		40		41		42	
43		44		45		46		47		48		49	
50		51		52		53		54		55		56	
57		58		59		60		61		62		63	
64		65		66		67		68		69		70	
71		72		73		74		75		76		77	
78		79		80		81		82		83		84	
85		86		87		88		89		90		91	
92		93		94		95		96		97		98	
99		100		101		102		103		104		105	
106		107		108		109		110		111		112	
113		114		115		116		117		118		119	
120		121		122		123		124		125		126	
127		128		129		130		131		132		133	
134		135		136		137		138		139		140	
141		142		143		144		145		146		147	
148		149		150		151		152		153		154	
155		156		157		158		159		160		161	
162		163		164		165		166		167		168	
169		170		171		172		173		174		175	
176		177		178		179		180		181		182	
183		184		185		186		187		188		189	
190		191		192		193		194		195		196	
197		198		199		200		201		202		203	
204		205		206		207		208		209		210	
211		212		213		214		215		216		217	
218		219		220		221		222		223		224	
225		226		227		228		229		230		231	
232		233		234		235		236		237		238	
239		240		241		242		243		244		245	
246		247		248		249		250		251		252	
253		254		255		256		257		258		259	
260		261		262		263		264		265		266	
267		268		269		270		271		272		273	
274		275		276		277		278		279		280	
281		282		283		284		285		286		287	
288		289		290		291		292		293		294	
295		296		297		298		299		300		301	
302		303		304		305		306		307		308	
309		310		311		312		313		314		315	
316		317		318		319		320		321		322	
323		324		325		326		327		328		329	
330		331		332		333		334		335		336	
337		338		339		340		341		342		343	
344		345		346		347		348		349		350	
351		352		353		354		355		356		357	
358		359		360		361		362		363		364	
365		366		367		368		369		370		371	
372		373		374		375		376		377		378	
379		380		381		382		383		384		385	
386		387		388		389		390		391		392	
393		394		395		396		397		398		399	
400		401		402		403		404		405		406	
407		408		409		410		411		412		413	
414		415		416		417		418		419		420	
421		422		423		424		425		426		427	
428		429		430		431		432		433		434	
435		436		437		438		439		440		441	
442		443		444		445		446		447		448	
449		450		451		452		453		454		455	
456		457		458		459		460		461		462	
463		464		465		466		467		468		469	
470		471		472		473		474		475		476	
477		478		479		480		481		482		483	
484		485		486		487		488		489		490	
491		492		493		494		495		496		497	
498		499		500		501		502		503		504	
505		506		507		508		509		510		511	
512		513		514		515		516		517		518	
519		520		521		522		523		524		525	
526		527		528		529		530		531		532	
533		534		535		536		537		538		539	
540		541		542		543		544		545		546	
547		548		549		550		551		552		553	
554		555		556		557		558		559		560	
561		562		563		564		565		566		567	
568		569		570		571		572		573		574	
575		576		577		578		579		580		581	
582		583		584		585		586		587		588	
589		590		591		592		593		594		595	
596		597		598		599		600		601		602	
603		604		605		606		607		608		609	
610		611		612		613		614		615		616	
617		618		619		620		621		622		623	
624		625		626		627		628		629		630	
631		632		633		634		635		636		637	
638		639		640		641		642		643		644	
645		646		647		648		649		650		651	
652		653		654		655		656		657		658	
659		660		661		662		663		664		665	
666		667		668		669		670		671		672	
673		674		675		676		677		678		679	
680		681		682		683		684		685		686	
687		688		689		690		691		692		693	
694		695		696		697		698		699		700	
701		702		703		704		705		706		707	
708		709		710		711		712		713		714	
715		716		717		718		719		720		721	
722		723		724		725		726		727		728	
729		730		731		732		733		734		735	
736		737		738		739		740		741		742	
743		744		745		746		747		748		749	
750		751		752		753		754		755		756	
757		758		759		760		761		762		763	
764		765		766		767		768		769		770	
771		772		773		774		775		776		777	
778		779		780		781		782		783		784	
785		786		787		788		789		790		791	
792		793		794		795		796		797		798	
799		800		801		802		803		804		805	
806		807		808		809		810		811		812	
813		814		815		816		817		818		819	
820		821		822		823		824		825		826	
827		828		829		830		831		832		833	
834		835		836		837		838		839		840	
841		842		843		844		845		846		847	
848		849		850		851		852		853		854	
855		856		857		858		859		860		861	
862		863		864		865		866		867		868	
869		870		871		872		873		874		875	
876		877		878		879		880		881		882	
883		884		885		886		887		888		889	
890		891		892		893		894		895		896	
897		898		899		900		901		902		903	
904		905		906		907		908		909		910	
911		912		913		914		915		916		917	
918		919		920		921		922		923		924	
925		926		927		928		929		930		931	
932		933		934		935		936		937		938	
939		940		941		942		943		944		945	
946		947		948		949		950		951		952	
953		954		955		956		957		958		959	
960		961		962		963		964		965		966	
967		968		969		970		971		972		973	
974		975		976		977		978		979		980	
981		982		983		984		985		986		987	
988		989		990		991		992		993		994	
995		996		997		998		999		1000		1001	
1002		1003		1004		1005		1006		1007		1008	
1009		1010		1011		1012		1013		1014		1015	
1016		1017		1018		1019		1020		1021		1022	
1023		1024		1025		1026		1027		1028		1029	
1030		1031		1032		1033		1034		1035		1036	
1037		1038		1039		1040		1041		1042		1043	
1044		1045		1046		1047		1048		1049		1050	
1051		1052		1053		1054		1055					

G

H

exin
gen

tili

op

to

ve

me

je

in

re

u

i

t

l

i

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER QUARTUS.

HIC liber totus problematicus est: docet, quo artificio figuræ præsertim ordinatæ circulo inscribantur & conscribantur. Amplissimus est illius usus in munitionibus extruendis: & ex illo quasi fonte eximæ illæ sinuum, tangentium, & secantium tabulæ ingenti bono Matheseos fluxere.

Est vero Quartus hic Elementorum liber Trigonometriæ utilisissimus. Circulo enim polygonis inscribendo tabulas Chordarum, Tangentiarum, & Secantium fabricare discimus: quarum ope figurarum & corporum magnitudines mensuramus. Neque obliuiscimur Solarem Aspectus, quos vocamus, Quadrilem nempe, Sextilem, &c. his distinguimus: utpote a polygonorum in circulo inscriptione omnino pendentes. Neque sane Circuli aream seu quadraturam quandam aliandam quam ex polygonorum innumerorum circulo inscriptorum & circumscriptorum arcis seu quadraturis colligere possumus. Et haud aliter circularum ad se invicem rationem duplicatam, & duplicatam polygonorum usdem inscriptorum aut circumscriptorum ratione colligimus. Architectura vero militaris polygonis circulo inscriptis toties utitur, ut præ aliis omnibus scientiis huius libri in solidam fere debere videatur.

DEFINITIONES.

1. **F**igura rectilinea circulo inscripta est, vel circulus figuræ circumscriptus, cum singulorum angulorum vertex in circumferentiâ existat.
2. Figura rectilinea circulo circumscripta est, vel circulus figuræ inscriptus est, cum singula latera circulum tangent.
3. Figura ordinata seu regularis est, quæ æquilatera & æquiangula est.

PRO.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. 1.4. **C**irculo (BD) rectam datam (A) diametro non maiorem, inscribere.

Accipe in peripheria quodvis punctum B. Centro B intervallo datae A describe arcum circulo decurrentem in C. Duc rectam BC. Dico factum.

PROPOSITIO II.

Fig. 2. **C**irculo priangulum inscribere dato (X) equiangulum.

(a) per 23. l. 1. Circulum tangat EF in D. Fiat angulus EDG par (a) angulo C, & FDH par B: jungaturque GH. Dico factum.
 (b) per 32. l. 3. Nam angulus H aequatur (b) angulo EDG; hoc est (a) angulo C: & G aequatur (d) FDH; hoc est (a) ipsi B. Angulus (e) per constr. etiam GDH (f) aequatur A. Factum est igitur quod petebatur.
 (c) per constr. angulo C: & G aequatur (d) FDH; hoc est (a) ipsi B. Angulus (e) per constr. etiam GDH (f) aequatur A. Factum est igitur quod petebatur.
 (d) per 32. l. 3. Nam angulus H aequatur (b) angulo EDG; hoc est (a) angulo C: & G aequatur (d) FDH; hoc est (a) ipsi B. Angulus (e) per constr. etiam GDH (f) aequatur A. Factum est igitur quod petebatur.
 (e) per constr. etiam GDH (f) aequatur A. Factum est igitur quod petebatur.
 (f) per corol. batur.
 9. p. 32. l. 1.

PROPOSITIO III.

Fig. 3. **C**irculo circumscribere triangulum equiangulum dato ILK.

Latus IK utrinque producat, ut fiant externi anguli O & N. Fac in centro A per 23. l. 1. angulos GAB, BAF pares angelis O, N. Deinde in punctis G, B, F circulum tangant tres rectae coeuntes in C, E, D. Triangulum CDE circulo circumscriptum & equiangulum dato ILK.

(g) per 12. l. 3. In quadrilatero CGAB, anguli G & B sunt duo (g) recti. Ergo reliqui GAB & C efficiunt simul etiam duos (h) rectos. ac proinde aequantur duobus simul O, I. Ablatis igitur GAB & O, aequalibus per constr. remanent aequales, C & I. Eodem modo ostenditur E aequalis esse K. Ergo D & L (i) etiam aequales erunt. Factum est igitur quod petebatur.
 (h) per theor. 1. schol. post 32. l. 1. Quod autem tangentes concurrant, sic ostenditur. Anguli (k) per 13. l. 1. O, I, & K, N sunt aequales (k) 4. rectis, & L, E sunt minores (l) per 32. l. 1. duobus (l) rectis. Ergo O, N, (hoc est per constr. GAB & BAF) sunt maiores duobus rectis. Ergo GAF est minor (m) per corol. non duobus (m) rectis. Ergo recta GF cadit inter A & D. 9. p. 13. l. 1. Ergo cum AGD, AFD sint recti, erunt DGF, DFG duo (n) per schol. post 31. l. 1. rectis minores. Ergo (n) CGD, EFD concurrunt versus D. Simili ratione demonstrabis concurrere reliquas.
 PRO-

PROPOSITIO IV.

Triangulo circulum inscribere.

Duos angulos C & E biseca rectis CA , EA concurrentibus in A . Ex A duc perpendicularares AB , AG , AF . Circulus centro A per B descriptus, transibit etiam per G & F , tangetque tria latera trianguli. Fig. 3.

In triangulis enim CAG & CAB , quia anguli AGC , ABC , itemque GCA , BCA per constr. æquantur, & latus quoque AC est commune, etiam AG , AB (a) æqualia erunt. Pari modo ostendam paria esse AF , AE . Circulus ergo descriptus (a) per 26. l. 1. centro A transit per B , G , F . Et quia anguli ad B , G , F sunt recti, tangit (b) omnia trianguli latera. Fecimus ergo quod (b) per 16. l. 3. petebatur.

[Hinc cognitis lateribus trianguli inveniantur eorum segmenta quæ sunt a centro ad circuli inscripti. Sic $DC = 12$. $DE = 18$. $CE = 16$. Erit $DC + CE = 28$. ut quæ sit $DE = 18 = DE + DG + GE$; remanet $10 = CG + CB$. Ergo CG vel $CB = 5$. Prinde EB vel $EF = 11$. Quare FD vel $DG = 7$.]

PROPOSITIO V.

Triangulo circulum circumscribere; seu per tria data puncta (B , C , D) non ad unam rectam Fig. 4. posita, circulum describere.

Puncta data B , C , D binis rectis BC , CD connecte, quas biseca perpendicularibus OA , EA concurrentibus in A . Hoc erit centrum circuli per B , C , D transeuntis.

Ductæ intelligantur rectæ AC , AD , AB . Per constr. latera DO , AO æquantur lateribus CO , OA , & anguli ad O sunt recti. Ergo AD (a) æquatur AC . Eodem modo AB æquatur AC . Ergo etiam AD , AB (a) æquales. Ergo circ- (c) per 4. l. 1. culus centro A descriptus per B , transibit etiam per C & D . (d) per aut. 1. Quid petebatur.

Ad prædictum opus centris B , C , D describere tres æquales circulos se mutuo interfecantes, & per intersectiones ducere rectas, hæ sibi occurrentes dabunt centrum quæsum.

PRO.

PROPOSITIO VI. & VII.

Fig. 5.

Circulo quadratum inscribere, & circumscribere.

Ducantur diametri BD, CE se mutuo secantes perpendiculariter. Rectæ quæ harum terminos jungunt, circulo quadratum inscribunt.

Demonstratio patet ex 4. l. 1. & ex 31. l. 3. Ducantur deinde quatuor tangentes circulum in B, C, D, E concurrentes in I, F, G, H. Figura IFGH quadratum est circulo circumscriptum.

Demonstratio patet ex 18. l. 3. ex coroll. 2. p. 36. l. 3. ex 18. & 34. l. 1.

Scholium.

Fig. 5.

(a) Per 31. l. 3.

(b) Per 47. l. 1.

Quadratum circumscriptum circulo, duplum est inscripti. Nam quia angulus BCD in semicirculo rectus (a) erit quadratum ex DB (hoc est quadratum FI) æquale quadratis DC, BC, ac proinde duplum quadrati DC, hoc est quadrati CDEB.

PROPOSITIO VIII. & IX.

Fig. 6.

Quadrato (BEFC) circulum inscribere, & circumscribere.

Ducantur diametri in quadrato se secantes in A. Centro A per B descriptus circulus transibit etiam per E, F, C.

Deinde ex A duc AD perpendicularem ad CB. Centro A per D descriptus circulus tanget omnia quadrati latera.

Pars 1. Quia ex hyp. CB, EB latera sunt æqualia, erunt (c) Per 5. l. 1. anguli BCE, BEC (c) æquales. Angulus autem CBT rectus (d) Per coroll. eius est per hyp. Ergo BCE, BEC (d) sunt semirecti. Eodem modo ostendatur GBF & reliquos esse semirectos, adeoque æquales inter se.

(d) Per 6. l. 1. Ergo in triangulo BAC cum duo sint æquales anguli CBA, & BCA, erunt AB & AC (e) æquales. Eadem ratione AB, AE, AF æquales erunt.

Circulus igitur centro A per B descriptus transibit etiam per E, F, C.

Pars 2. Ex A sunt perpendiculares insuper AG, AH, AI. Quoniam in triangulis GBA & DBA anguli ad D & G, itemque ad B inter se æquales sunt, latiusque AB commune,

(f) Per 26. l. 1. latera (f) AD, AG æqualia erunt. Eadem ratione æqualia sunt AG, AH, AI. Circulus ergo centro A per D transiens, transibit

transibit etiam per G, H, I, tangetque latera (a) omnia quadrati, quia anguli ad D, G, H, I sunt recti. Fecimus ergo quod petebatur.

PROPOSITIO X.

Triangulum Isosceles construere (BAC) in quo Fig. 7.
angulus ad basim (ABC vel ACB) sit duplus anguli ad verticem (A.)

Sumatur quævis recta AB, quam ita secet (b) in D, ut (b) Per 11. l. 2.
rectangulum ABD sit æquale quadrato DA. Tum centro A per
B describe circum, cui inscribe BC (c) æqualem DA, & jun- (c) Per 1. l. 4.
ge AC. Erit triangulum BAC quæsitum.

Ducatur enim recta DC, & per C, D, A describe (d) circu- (d) Per 5. l. 4.
lum. Quoniam rectangulum ABD æquatur quadrato AD,
hoc est BC, liquet BC tangere (e) circum DO quem se- (e) Per 37.
cat CD. Ergo angulus BCD æquatur (f) angulo A in seg- (f) Per 32. l. 3.
mento alterno: additoque communi DCA, erit BCA æqua-
lis duobus A & DCA. Sed quia latera AB, AC æquantur,
ABC æqualis (g) est BCA. Ergo etiam ABC æquatur (g) Per 5. l. 1.
duobus A & DCA. Sed etiam externus BDC (h) æqua- (h) Per 32.
tur duobus internis A & DCA. Ergo ABC & BDC æqua-
les sunt. Recta igitur DC æquatur (i) BC, hoc est per (i) Per 6. l. 1.
constr. DA. Ergo anguli A & DCA (k) æquantur. Quare (k) Per 5. l. 1.
angulus ABC, qui duobus ostensus est æqualis, duplus erit
unius A. Factum igitur est quod petebatur.

Corollarium.

Anguli ad basim singuli B & C in triangulo Isoscelio jam
constructo sunt duæ quintæ duorum rectorum, seu qua-
tuor quintæ unius recti, & reliquus A est una quinta duo-
rum rectorum seu duæ quintæ unius. Patet ex propositione
hac & ex 32. lib. 1.

PROPOSITIO XI.

Circulo pentagonum ordinatum inscribere. Fig. 8. & 7.

Describatur (l) triangulum BAC habens angulum ad ba- (l) Per prac-
sim duplum anguli ad verticem. Huic æquiangulum CAD
(m) inscribe circulo. Angulos ad basim ACD, & ADC (m) Per 2.
seca bifariam rectis CE, DB, occurrentibus circulo in E & F.
B. Puncta A, B, C, D, E, rectis lineis connexa dabunt pen-
tagonum ordinatum circulo inscriptum.

Nam,

- Nam ex constructione liquet quinque angulos I, N, Q, S, O æquales esse. Quare etiam arcus iis subtensis, AE, ED, DC ,
 (a) 28. l. 3. CB, BA (a) sunt æquales. Itaque rectæ subtensæ arcubus
 (b) per 27. etiam æquales (b) erunt. Pentagonum igitur æquilaterum est.
 l. 3. Est vero etiam æquilangulum (c) quia ejus anguli BAE ,
 (c) per 29. AED , &c. insistant arcubus æqualibus $BCE, ABCE$,
 l. 3. &c. Factum est igitur quod petebatur.

Corollarium.

Fig. 8.

Angulus Pentagoni ordinati facit sex quintas unius recti seu tres quintas duorum. Nam tres anguli ad A , cum sint æquales, utpote æqualibus arcibus BC, CD, DE , insistentes, & medius per coroll. per 27. sit duæ quintæ unius recti, tres simul, hoc est ipse pentagoni angulus conficiat sex quintas unius recti.

Fig. 9.

Scholium. [Universaliter figura imparium laterum inscribitur circulo beneficio triangularum isoscelium, quorum anguli æquales ad basim multiplices sunt eorum qui ad verticem sunt angulorum. Factum vero latum figurae in circulo inscribitur ope isoscelium triangularum quorum anguli ad basim multiplices sciquialtere sunt eorum qui ad verticem sunt angulorum.]

Ut in triangulo isoscelo ACD si angulus C aut D æqualis sit tribus angulis A , Latus CD erit latus Heptagoni. Si quatuor, erit latus Enneagoni, &c. Sin vero C vel D æqualis sit $1\frac{1}{2}$ anguli A , erit CD latus quadrati. Et si C vel D æqualis sit $2\frac{1}{2}$ anguli A , subtendet CD sextam partem circumferentiae. Pariterque si C vel D æqualis sit $3\frac{1}{2}$ anguli A , erit CD latus octagoni, &c.]

Scholium.

Fig. 12.

Ingeniosa est Euclidea pentagoni inscriptio, sed multo expeditior illa Ptolemæi, quam tradit lib. 1. Almagesti, et est ejusmodi.

Ducantur diametri ED, BF se mutuo perpendiculariter interfecantes in A . Radium AD bisectetur in C . Centro C per B describe arcum, diametro ED occurrentem in G . Recta GB est latus pentagoni, & AG decagoni.

Demonstratio hic dari nequit, pendet enim a lib. 13. Euclid. Eam vide apud Clavium in scholio post p. 10. l. 13.

Pro-

Problema.

Super data recta (A B) pentagonum ordinatum ita construes. *Fig. 9.*
 Seca (a) A B, sic ut rectangulum A B C sit æquale quadrato (a) Per 11.
 A C. Ex A B utrimque producta aufer A D, B E, æquales *l. 2.*
 majori segmento A C. Centris A & D, intervallo A B de-
 scribe arcus duos se secantes in F: Item centris B & E, eo-
 dem intervallo se secantes in G. Rursum centris F & G, in-
 tervallo itidem A B, alios se secantes in I. Puncta A, F, I, G, B
 rectis lineis juncta dabunt pentagonum ordinatum, (hoc est
 æquilaterum, & æquiangulum) super data A B.

Æquilaterum esse patet ex constructione: æquiangulum
 esse sic demonstrabitur. Ducatur D F. Patet ex constructione
 triangulum A F D esse isosceles. Et basis A D est majus seg-
 mentum lateris D F, extrema & media ratione secti, (est enim
 D F æqualis A B, & A D æqualis A C.) Ergo angulus (b) (b) Per coroll.
 D A F est duæ quintæ duorum rectorum. Ergo reliquus F A B *p. 10. l. 4.*
 est (c) tres quintæ duorum rectorum, sive sex quintæ unius (c) Per 13. l. 1.
 recti; ac proinde est (d) angulus pentagoni ordinati. Eodem (d) Per coroll.
 modo ostenditur angulum G B A esse sex quintas unius recti, *p. 12. l. 4.*
 ac proinde parem F A B. Unde necesse jam est reliquos F, G, I,
 in æquales esse, ut patet ex 8. l. 1. si concipiatur subtrahi
 recta F G.

PROPOSITIO XII.

Circulo pentagonum ordinatum circumscribere. *Fig. 10.*

Inscribatur pentagonum ordinatum per præced. G H I K M.
 ducanturque tangentes in punctis, G, H, I, K, M, quæ con-
 currant in B, C, D, E, F. Dico factum.

Ex centro duc rectas A G, A B, A H, A C, A I. Quoniam
 B G, B H ex uno puncto B, tangunt circum, æquales (a) (a) Per coroll.
 erunt. Trigona igitur G A B, H A B, sibi mutuo æquilatera *p. 36. l. 3.*
 sunt. Æquantur ergo (b) anguli O, P, item Q, S: ac pro- (b) Per 8. l. 1.
 inde totus B duplus est ipsius P, & totus G A H duplus est S.
 Eadem de causa anguli C & H A I dupli sunt ipsorum T, & N.
 Sed G A H & H A I æquales (c) sunt, quia insunt arcu- (c) Per 29. l. 3.
 bus æqualibus G H, H I, per constr. Ergo etiam eorum di-
 midii S, N æquales erunt. Quoniam igitur in triangulis
 B A H, C A H, duo anguli S, N æquantur, itemque duo ad
 H (d) recti, latusque A H est commune, etiam (e) B H, C H, (d) Per 18. l. 3.
 itemque anguli P, T æquales erunt. Eodem modo offen- (e) Per 26. l. 3.
 dam rectas B G, F G esse æquales. Igitur C B, F B duplæ
 sunt

sunt æqualium BG, BH, ac proinde æquales. Eodem modo ostendam reliqua latera pentagoni circumscripti esse æqualia. Illud igitur æquilaterum erit: est vero & æquiangulum, quia cum jam ostensum sit angulos B & C duplos esse æqualium P & T; etiam ipsi æquales erunt: eodemque modo & reliqui. Ordinatam igitur pentagonum circulo circumscriptimus. Quod erat faciendum.

Eodem artificio circulo circumscribitur ordinata figura quæcunque, si prius illi similis circulo inscribatur.

PROPOSITIO XIII. & XIV.

Fig. 11.

Pentagono ordinato circulum inscribere, & circumscribere.

Duos pentagoni angulos B, C biseca rectis BN, CS concurrentibus in A. Ex A duc perpendiculararem AL.

Circulus centro A per L descriptus, tanget omnia pentagoni latera. • Circulus vero descriptus centro A per B, transibit etiam per C, D, E, F.

- (a) *Per hyp.* Pars 1. In trigonis DCA, BCA, quia latera DC, CA, (a) lateribus BC, CA, itemque (b) anguli P & O æquantur.
 (c) *Per 4. l.* etiam G & I æquales (c) erunt. Sunt vero (d) etiam tunc
 (d) *Per hyp.* B & D æquales. Quare cum (e) angulus G fit dimidius anguli B, etiam I erit dimidius ipsius D. Igitur D quoque bisectus est recta DM. Ob eandem causam, reliqui pentagoni anguli E, F sunt bisecti: ac proinde omnes dimidii anguli inter se æquales erunt. Ducantur insuper perpendicularares AM, AS, AN, AR. Quoniam igitur in trigonis LBA, MBA, anguli G, BLA æquantur angulis Q, BMA, latusque BA commune est, etiam (f) AL, AM æquales erunt. Pari modo ostendam reliquas AM, AS, AN, AR inter se æquari. Circulus ergo centro A transiens per L, transibit etiam per M, S, N, R: & quia anguli ad L, M, S, N, R recti sunt per constr. tanget (g) quinque latera pentagoni. Quod erat primum.

Pars 2. In trigono CAB, quia anguli O & G jam ostensi sunt æquales, erunt latera AC, AB (h) æqualia; eademque ratione æquantur etiam AB, AF, AE, AD; ac proinde circulus centro A transiens per B, transibit etiam per C, D, E, F. Pentagono igitur circulum inscripsimus & circumscripsimus. Quod erat faciendum.

[Eadem methodo in qualibet figura æquilatera & æquiangulari, & circa quamlibet figuram æquilateram & æquiangulam, circulus describetur.]

PRO.

PROPOSITIO XV.

IN dato circulo Hexagonum ordinatum describere. Fig. 13.

Ducatur diameter FAB. Centro B per centrum A describere circumulum, qui datum secet in C & D. Item centro F per A describere circumulum, qui secet datum in E & G, sex puncta B, C, E, F, G, D rectis lineis connexa dabunt quæsitum.

Ex centro A emittantur rectæ AC, AE, AG, AD. Patet triangula H, I, M, L (a) esse æquilatera: deinde quia anguli (a) *En. 1. l. 1.* CAB, EAF, singuli (b) efficiunt unam tertiam rectorum (b) *Per coroll. 12. p. 32. l. 1.* duorum, ac proinde simul duas tertias, patet (c) EAC etiam (c) *Per coroll. 1. p. 13. l. 1.* esse unam tertiam duorum rectorum. Anguli igitur EAC, CAB æquales sunt: Sunt autem & latera EA, AC æqualia lateribus BA, AC. Ergo (d) basis EC basi CB, hoc est (d) *Per 4. l. 1.* jam ostensum,) radio AC æqualis est. Quare etiam N æquilaterum est. Eodem modo ostenditur æquilaterum esse K. Quoniam igitur triangula omnia H, I, K, L, M, N æquilatera sunt, Patet latera singula CB, BD, DG, GF, FE, EC æquari radio circuli AC, seu AB, ac proinde inter se. Hexagonum igitur æquilaterum est. Est vero & æquiangulum, cum singuli ejus anguli E, C, B, D, G, F consistant duobus æquilateri trianguli angulis. Ergo Hexagonum quod circulo inscripsimus, est ordinatum.

Corollaria.

1. **I**atus hexagoni circulo inscripti [*sive chorda graduum 60.*] æquale est radio. [*Ergo sinus 30. graduum æquatur radii * dimidio.*]

** Per coroll. 2. p. 3. l. 3.*

2. Angulus hexagoni ordinati est quatuor tertie unius rectorum: constat enim ex duobus angulis trianguli æquilateri, quorum singuli efficiunt (e) duas tertias unius rectorum.

(e) *Per coroll. 12. p. 32. l. 1.*
Fig. 14.

3. Si ducatur insuper diameter PS, perpendicularis alteri FB, & intervallo radii PA, centris P & S, sectiones fiant in O & Q, in R & T; puncta P, E, O, F, R, G, S, D, T, B, Q, C rectis lineis connexa dabunt duodecangulum ordinatum una circini apertura circulo inscriptum. Id quod magno est usui in Gnomonica.

4. Ex demonstratis elicitur etiam descriptio facillima trianguli æquilateri in circulo. Ducta diametro FB, centro B per A centrum describe arcum CAD. Puncta C, F, D rectis juncta dant æquilaterum quæsitum.

5. Æquilateri trianguli latus (CXD) a diametro (BF) ad ipsum perpendiculari, quartam partem (BX) abscindit. Nam anguli ACX, BCX, æqualibus arcibus GD, DB insistentes, æquales (f) sunt: & latera AC, CX æquantur lateribus BC, CX.

(f) *Per 29. l. 3.*

(a) Per 4. L. 1. CX. Ergo AX, BX (a) æquales sunt. Ergo BX est quarta pars diametri BF.

Scholium.

Problema.

Fig. 13.

(b) Per 1. L. 1.

Hexagonum ordinatum super data recta (BC) ita construes. Fac (b) triangulum CAB æquilaterum super datam CB. Centro A per B & C describe circulum. Is capiet hexagonum super data recta CB. Patet ex propos. & corol. 1.

Theorema.

Quadratum ex latere trianguli æquilateri, triplum est quadrati ex semidiametro circuli cui inscriptum est, adeoque ad quadratum diametri est ut 3. ad 4.

Fig. 14.

(c) Per 12. L. 2.

Ducatur semidiameter AD. Quadratum FD æquatur quadratis (c) FA, DA, & rectangulo FAX bis. Sed rectang. FAX bis est par quadrato semidiametri FA, seu DA: (nam (d) Per corol. quia AX, XB æquales (d) sunt, rectangulum FAX bis æ-

5. preced.

(e) Per 1. L. 2.

quatur duobus rectangulis nempe sub FA, AX, & sub FA, XB; hoc est rectangulo (e) FAB; hoc est quadrato FA. Ergo quadratum FD triplum est quadrati ex semidiametro. Quia autem quadratum totius diametri FB quadruplum (f) Per coroll. (f) est quadrati FA. Patet quadratum FD esse ad quadratum diametri, ut 3. ad 4.

3. p. 4. L. 2.

Hinc sequitur latus æquilateri trianguli esse ad diametrum, ut radix quadrata ternarii est ad 2. radicem nempe quadratam quaternarii, ac proinde esse lineas incommensurabiles.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 15.

IN circulo quindecagonum ordinatum describere.

(g) Per 11.

L. 4.

(h) Per corol.

4. p. 15. L. 4.

Circulo inscribe (g) latus pentagoni AC, & trianguli (h) æquilateri latus AD. Arcum CD biseca in E. CE est latus quindecagoni.

Nam si tota peripheria statuatur esse 15. erit arcus AC, 3. & arcus AD, 5. ac proinde arcus CD, 2. ideoque CE unum.

Corollarium.

Fig. 15.

HAC methodo innumere figuræ ordinatæ circulo inscribentur. Nam si duarum ordinatarum latera AC, AD circulo sint inscripta, arcuum differentia CD continebit tot latera

latera novæ figuræ ordinatæ, quot unitatibus differunt denominatores priorum. Denominator autem novæ figuræ habetur, si denominatores priorum inter se multiplicentur.

Ut si AD sit latus quadrati, & AC decagoni. Denominatorum differentia est 6. Igitur arcus CD continet 6. latera figuræ novæ. Ea vero est 40. laterum. Denominatorum enim 4. & 10. inter se multiplicati faciunt 40.

Scholium.

Nondum reperta ars est, qua solo circino & regula inscribantur circulo figuræ ordinatæ laterum 7, 9, 11, 13, 17, &c. Cum illa inscriptio figurarum dependeat a divisione circumferentiæ in partes datas, quæ etiamnum desideratur. Licebit tamen, circuli circumferentia in 360. partes divisa, mechanice figuras quascunque ordinatas circulo inscribere hunc in modum.

Problema 1.

Circulus 360. (hoc est totam circumferentiam) divide per Fig. 156
denominatorem polygoni inscribendi, (exem. gr. non-
anguli.) Quot unitatibus constat quotiens (40.) tot graduum
sic in centro angulum AGK. AK erit latus figuræ quæ sit
(nonangulæ) circulo inscribendæ.

Problema 2.

At super data recta quamvis figuram ordinatam describes Fig. 157.
pæsidio tabellæ sequentis:

Angulus rectus est ad angulum figuræ,

differt.

In Pentagono	ut	5	ad	6... 1
Hexagono	ut	3	ad	4... 1
Heptagono	ut	7	ad	10... 3
Octogono	ut	2	ad	3... 1
Nonagono	ut	9	ad	14... 5
Decagono	ut	5	ad	8... 3
Undecagono	ut	11	ad	18... 7
Duodecagono	ut	3	ad	5... 2

Oporteat igitur super data recta XB heptagonum ordinatum describere. Centro X describe circulum, a quo abscinde quadrantem BO. Vide in tabula quæ sit proportio recti anguli ad angulum heptagoni: reperies, ut 7. ad 10. & differentia

rentia est 3. Quadrantem igitur partire in 7. arcus æquales, quorum adhuc tot ipsi adde ex O in N, quot unitates habet
 * Per 5. l. 4. differentia. Per tria puncta B X N, describe * circulum, hic capiet heptagonum datæ rectæ X B.

Tabella confecta est ope theorematis 2. in schol. post 32. l. 1. quo reperitur numerus rectorum angulorum, quos efficiunt anguli cujuscunque rectilinei, qui numerus divisus per denominatorem figuræ exhibet denominatorem proportionis anguli figuræ ad rectum.

Quoniam vero de figuris ordinatis multa hactenus sunt proposita, finiat hunc librum Procli celebre theorema.

Theorema.

TRes tantum figuræ ordinatæ videlicet 6. triangula æquilatera, 4. quadrata, 3. hexagona, spacium replere possunt: Hoc est unam continuam superficiem constituere. Quod sic demonstratur. Ut aliqua figura ordinata sæpius repetita possit replere spacium, requiritur ut anguli plurium ejus speciei figurarum circa unum punctum compositi, possint conficere quatuor rectos; tot enim circa unum punctum possunt constitui, ut patet ex coroll. 3. p. 13. l. 1. exempli gr. ut triangula æquilatera possint replere spacium, requiritur, ut aliquot anguli talium triangulorum N, M, L, K, I, H, circa punctum A compositi efficiant quatuor rectos. Atqui quatuor rectos efficiunt 6. anguli trianguli æquilateri; (nam unus facit duas tertias † unius recti, ac proinde 6. faciunt 12. tertias unius recti, hoc est 4. rectos;) item 4. anguli quadrati, ut patet; * Per coroll. item 3. anguli hexagoni (unus enim facit 4. tertias * unius recti, ac proinde 3. faciunt 12. tertias unius recti, hoc est rursum 4. rectos.) Ergo, &c.

Quod autem id nulla alia figura possit, liquido constabit si angulum ejus repertum, ut supra, quocunque numero multiplices: semper enim aut deficient a 4. rectis, aut excedent.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER QUINTUS.

Quintus hic Elementorum liber Demonstrandis libri sexti propositionibus omnino est necessarius. Doctrinam quam continet frequentissime usurpamus. Argumentandi vero ratio et proportione Geometrica petita, est plane subtilissima, solidissima, brevissima. Cujusmodi ratiocinandi methodo, tanquam Logica quadam Mathematica; Geometria, Arithmetica, Musica, Astronomia, Statica, & reliqua omnes Matheseos partes maxime utuntur: utpote qua proportionibus quibusdam inter se connexis fere tota nituntur: modosque de proportionalibus ratiocinandi e libro hoc quinto mutuari solent. Geometria quidem practica, qua linearum, figurarum, atque corporum mensuras complectitur; et proportionum doctrina plerumque derivatur. Regula Arithmetice ad unam omnes e hujusce quinti libri propositionibus, sine septimo, octavo, nono de numeris ex professo tractantibus, demonstrari possunt. Antiquorum Musicam proportionem Geometricam Sonorum modulamini applicatas rite dixeris: quod idem fere de Statica, corporum ponderibus applicata possis asserere. Ut rem totam paucis complectar, si proportionis doctrinam e Mathesi abstuleris, nihil fere præclarum aut egregium relinques.

Quanti momenti in Geometria sit scientia proportionum, nemo est Mathematicus, qui ignoret. Ea traditur ab Euclide toto quinto & sexto libro. Sed quamvis illi cæterisque elementorum conditoribus plurimum debeamus; in iis tamen, quæ de proportione tradiderunt, desiderari aliquid videtur. Difficultas tota in definitione 5. l. 5. vertitur: ubi tradit Euclides, quid sit quatuor magnitudines esse proportionales, five duas rationes, easdem, similes, æquales esse. Definit igitur duas rationes tum æquales dici seu similes, quando antecedentia quocunque numero æqualiter multiplicata, consequentibus etiam quocunque numero æqualiter multiplicatis, semper vel simul æqualia sunt, vel simul majora, vel simul minora*. Atque ex ea definitione omnes deinde 5. & 6. libri demonstrationes mediate vel immediate deducit. Hæc do-

* Hæc definitio declaratur infra, post definitionem 6.

Strinx Euclidæ summa: quæ multiplicem, ut dixi, difficultatem habet. Nam imprimis certum est ea definitione non naturam æqualitum rationum, sed affectionem solummodo aliquam explicari. Deinde illa multiplicium proprietas adducitur, vel tanquam signum infallibile rationum æqualium, ut quandocumque ea demonstrata fuerit de quibusvis rationibus, inferre certo liceat æquales eas esse: vel is sensus illius est, ut per magnitudines eandem rationem habentes nihil aliud intelligi velit, quam earum multiplices modo jam dicto excedere, vel excedi. Si primum; demonstrare debuerat, eam affectionem omnibus & solis rationibus æqualibus inesse, ut ex ea rationum æqualitas certo possit inferri. Id vero minime vulgare theorema est, quod neque Euclides, neque alius post Euclidem ullus demonstravit. Si secundum; securi quidem erimus de veritate theorematum in sensu definitionis acceptorum, minime tamen ex vi demonstrationum nobis constare poterit de absoluta rationum æqualitate. Exemplum esto prima sexti. Certi erimus ex Euclidea demonstratione rationem triangulorum ABC , & DEF æqualem esse rationi basium AC , & DF , per rationum æqualitatem, solum intelligendo dictam illam proprietatem multiplicium; non colligemus tamen rationes illas triangulorum, basium rationibus vere & absolute æquales esse, cum demonstratum non sit affectionem illam multiplicium cum absoluta & vera rationum æqualitate necessario esse connexam. Quomocumque igitur illa definitio accipiat, librorum 5. ac 6. demonstrationes vacillant, quamdiu demonstratum non fuerit veram rationum æqualitatem cum ea multiplicium proprietate semper esse connexam. Denique ut sibi constarent omnia, tamen ille multiplicium labyrinthus mihi, aliisque semper displicuit, & tyronibus plurimum semper facessivit negotii, quorum ita plerumque mentes intricat, ut exitum vix reperiant. Quare ut doctrinam proportionum, quæ quasi medulla, atque anima Geometriæ, & universæ Matheseos est, ab ea labe vindicemus, hæc tria præstare conabimur.

Primo ostendam libri quinti theoremata, quæ ab Euclide per multiplices demonstrantur, eo fere loco habenda esse, quo axiomata, ac proinde declaratione potius subinde aliqua, quam demonstratione egere. Ita proportionum cognitio, quam ille circuitus multiplicium difficilem hactenus, & perobscuram effecerat, plana & expedita reddetur.

Secundo demonstrabimus, quandocumque antecedentium quolibet æque multiplices, consequentium quibuslibet æque multiplicibus vel pariter majores sunt, vel pariter minores, vel pariter æquales, tum rationes esse vere æquales, seu similes.

Quo

Quo stabilito omnes Euclidæ demonstrationes, totaque illius de proportionibus doctrina subsistet, ut qui nostris probationibus contentus non sit, ad Euclidean quamvis prolixas, jam tamen securas ac solidas se possit convertere. Assignabimus item (ac demonstrabimus) proportionum æqualium aliud indicium clarissimum ac primum, ex quo omnes Quinti libri propositiones deducere poterit qui voluerit.

Tertio, de proportionum denominatoribus, algorythmo, compositione, tractatum subjungam penitioris Geometriæ studiosis plane necessarium, ubi etiam demonstrabimus axioma illud, seu potius theorema hactenus indemonstratum rationem extremorum ex rationibus quolibet intermediarum componi.

Tyronibus satis erit definitiones & primam partem perlegere.

Monitum ad Tyrones.

[Q]uanti momenti in Geometria sit scientia proportionum nemo est Mathematicus, ut recte notat Tacquetus, qui ignoret. Est enim ipsa quodammodo scientiarum Mathematicarum medulla; & variis de proportionalibus ratiocinandi modi utilissimi simul sunt & certissimi: neque absque iis pedem vel hilum promovere licet. Verum hanc doctrinam animis humanis cum communi ratione quasi congenitam existimo; variorumque de proportionalibus ratiocinandi modos, quos integro hoc libro per ambages quamplurimas, tradit Euclides, non tam demonstratione propria dicta, quam illustratione nonnulla, & exemplis indigere censeo. Eos autem qui longo propositionum circuitu doctrinam hanc facillimam tradendam volunt, rem per se clarissimam nube quadam involvere, & longe difficilioram reddere omnino puto. Rei summam paucis aperiam. Notum est quatuor quantitates tum proportionales, siue analogias tum similes esse, cum Quantitas prima toties continet secundam, quoties tertia continet quartam: vel cum prima toties continetur in secunda, quoties tertia continetur in quarta. Sic $16 : 8 :: 4 : 2$. Atque etiam $3 : 9 :: 4 : 12$. Sunt similes rationes; quoniam in exemplo priore consequentia 8 & 2 bis in antecedentibus suis 16 & 4 respective continentur: adeoque ratio dupla in utrisque observatur. Et in exemplo posteriore rationes sunt etiam similes, quoniam consequentia 9 & 12 ter antecedentia sua respective continent; adeoque ratio subtripla in utrisque observatur. (Neque ulla est quantitatum commensurabilium ratio qua non possit per numeros certos; neque sane incommensurabilium ulla qua non possit per numeros ad veram rationem in infinitum approximantes certissime exprimi.) Porro, Ex antedictis liquet similes rationes quascunque non tantum per

numeros diversos, sed etiam per eosdem rectissime exponi. Sic sane ratio 2 ad 1 rationem tam 16 ad 8, quam 4 ad 2 plenissime designat: Ratio 1 ad 3 non minus exprimit rationem 4 ad 12, quam rationem 3 ad 9, uti oppido est manifestum. Si itaque quatuor quantitates sint proportionales $A : B :: a : b$. Queritur in hoc quinto libro quos similibus modis ha similes rationes mutari, atque inter se componi possint, ita ut rationes emergentes sint etiam nem utrinque similes? Responderi vero debet, modis omnino omnibus, quos quisquam imaginari queat. Cum enim tam ratio A ad B , quam ratio a ad b inter se similes sint, per eosdem numeros exprimi utique poterunt hoc modo, $A : B :: 9 : 3 :: a : b :: 9 : 3$. Atque proinde omnes omnino rationes utrinque aut Alternando, aut Invertendo, aut Componendo, aut Dividendo, aut Convertendo, aut Miscendo emergentes per eosdem plane numeros exprimentur; & eandem proinde rationem utrinque servabunt. Sic e.g. $A+B : B :: a+b : b$. quia utramque proportionem exprimit $9+3 : 3$. qua est rationis compositio. Neque aliter de reliquis est censendum. Hoc itaque tantum observent Tyrones, ut rationes quas tractant ubique similes, modo plane simili mutantur & ordinantur. Neque exinde locus erit dubitationi, quin ex huiusmodi ordinatione aut mutatione consimili, rationes ubique consimiles sint oriunda. Mirari autem subit eorum novitatem quae elementa Geometrica hactenus condiderunt, facillimum hoc aequilium rationum indicium illustrando huic libro quinto, & proportionum doctrina facilius explicanda adhibuisse. En vero modo primarios de similibus rationibus argumentandi, quos adhibet Geometria, in brevem Tabellam conjectos:

Sit	A	:	B	::	a	:	b	::	9	:	3.
Erit ergo											
Alternando.	A	:	a	::	B	:	b	::	9:9::3:3	:	
Invertendo.	B	:	A	::	b	:	a	::	3:9.		
Componendo.	$A+B$	:	B	::	$a+b$	:	b	::	9+3(12):3.		
Dividendo.	$A-B$	:	B	::	$a-b$	:	b	::	9-3(6):3.		
Convertendo.	A	:	$A+B$	::	a	:	$a+b$	::	9:9+3(12)		
vel	A	:	$A-B$	::	a	:	$a-b$	::	9:9-3(6)		
Mixtim	$A+B$	:	$A-B$	::	$a+b$	:	$a-b$	::	9+3(12):9-3(6)		
Ex aquo sit	$A : B :: a : b$				$B : C :: b : c$				Erit $A : C :: a : c$.		
	9	:	3::9:3.		3	:	1::3:1		Erit 9 : 1 :: 9 : 1.		Ubi ratio
	A ad C (seu 9 ad 1) componi dicitur ex rationibus A ad B ,										
	& B ad C , (vel ex 9 ad 3, & 3 ad 1.)										
Ex aquo sit	$A : B :: a : b$				$B : C :: r : a$				Erit $A : C :: r : b$		
permutata.	8	:	3::8:3.		3	:	12::2:8.		Erit 8 : 12::2:3.		
vel sic.	8	:	3::16:6.		3	:	2::24:16.		Erit 8:2::24:6.		
	a	:	$b::e \times a : e \times b$		b	:	$c::e \times b : e \times c$		Erit $a : e :: a \times b : e \times b$		

Qui itaque hosce de proportionalibus ratiocinandi modos probe callet, eosque pro re nata in usum proferre novit, propositionibus libri quinti particularibus (nisi forte illis qua mere sunt axiomata sua luce clarissima,) perraro indigebit. Unde sane, si mihi esset integrum, rationum doctrinam sine methodo Euclidea a primordiis tradidissimam sed cum Tacquetum nostrum, ordinis Euclidei ubique observantissimum, eumque integrum Lectori propinare certum sit, pluribus supersedebo.]

PRIMA PARS.

Proportionum elementa faciliori methodo proponuntur.

DEFINITIONES.

1. **P**ars aliquota magnitudinis est, quæ aliquoties repetita magnitudinem metitur, sive adæquat. Pars aliquanta, quæ non metitur.

Longitudo unius pedis est pars aliquota longitudinis 10. pedum, quia illam decies repetita metitur. Longitudo vero 4. pedum, est pars aliquanta lineæ 10. pedum, quia aliquoties repetita, nempe bis, illam non adæquat, repetita vero ter excedit.

2. Magnitudo magnitudinis multiplex est, cum minor metitur majorem, ac proinde ejus pars aliquota est; sive cum major minorem aliquoties continet præcise.

3. Ratio sive proportio est duarum ejusdem generis magnitudinum mutua quædam secundum quantitatem habitudo.

Sunt igitur in omni proportionem duo termini, quorum ille antecedens dicitur, qui primo nominatur, sive is qui nominandi casu effertur: alter Consequens.

Cum antecedens & consequens sunt æquales, proportio æqualitatis dicitur, cum inæquales, dicitur esse proportio inæqualitatis.

4. Ratio seu proportio rationalis est, quæ existit inter magnitudines commensurabiles, & numeris exprimi potest. Proportio irrationalis est, quæ existit inter magnitudines incommensurabiles, & nullis numeris explicari potest.

Porro commensurabiles quantitates sunt, quas aliqua communis mensura metitur; incommensurabiles quas nulla metitur mensura communis.

5. Dux rationes (A ad B, & C ad F) sunt similes, æquales, eædem; cum unius antecedens (A) æque seu eodem modo (hoc est nec magis, nec minus) continet suum consequens

Fig. 1. 1. 1.

quens (B,) quo alterius antecedens (C) continet suum consequens (F.)

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Vel quando unius antecedens (A) eodem modo continetur in suo consequente (B,) quo (C) antecedens alterius in suo (D) consequente (F.)

6. Dux rationes sunt dissimiles, siue una ratio est major altera, quando unius antecedens (I) magis continet suum consequens (L,) quam alterius antecedens (O) continet suum consequens (Q;) vel quando antecedens unius, minus continetur in suo consequente, quam antecedens alterius continetur consequente suo.

Proportionum equalitas & inaequalitas explicatur.

Quid porro sit unum antecedens aequae, vel magis continere suum consequens, quam antecedens alterum continet suum, si proportionem sint rationales, definire & explicari ulterius potest per numeros: ut si A sit triplum B, & C triplum F; perspicuum erit, quid sit, A aequae seu eodem modo continere B, quo C continet F: vel si I sit triplum L, O vero duplum Q; constabit rursus, quid sit I magis continere L, quam O continet Q. At si proportionem fuerint irrationales, ea res explicari ulterius nec potest, nec debet. Dantur magnitudines incommensurabiles A, B: perspicuum est A non solum majus esse B, sed etiam certo quodam modo esse majus, (A quippe alter continet B, quam alia quaelibet major minorve quam A:) neque tamen ulterius queri, aut explicari debet, quis sit certus ille modus, quo A continet B; quia per nullos numeros explicabilis est. Itaque quemadmodum datis binis incommensurabilibus quantitatibus, non debet ulterius queri, quid sit unam certo modo continere alteram; ita neque cum dantur quatuor proportionales incommensurabiles, queri debet ulterius, quid sit O eodem modo continere D, quo A continet B. Sicuti enim modus quo A continet B, ulterius est inexplicabilis; ita plane etiam identitas modi quo A continet B, cum modo quo C continet D, ulterius inexplicabilis est.

Fig. 1.

Fig. 3.

Fig. 3.

Fig. 5.

Fig. 5.

Quod vero cumque proportioni irrationali A ad B, dantes sint infinite alie proportionem irrationales aequales, majores, minores, diversis terminis constantes, facile poterimus intelligere hunc in modum. Sumatur quaecunque quantitas C. Et auferatur B ex A incommensurabili secum quantitate, quoties potest, puta ter: & supersit EF. Sit deinde O tertia pars ipsius C. Sit insuper quapiam X ipsi C incommensurabilis, quae major sit quam O. Quoniam igitur A continet B plus quam ter; C vero continet X minus quam ter, (nam C continet prae-

cise

cise ter O minorem quam X,) erit ratio irrationalis C ad X minor ratione irrationali A ad B. Accipiat jam Q, quarta pars C, & quæpiam esto Z, ipsi C incommensurabilis, quæ minor sit quam Q. Quoniam igitur A continet B minus quam quater; C vero continet Z plus quam quater, (cum C præcise quater contineat Q, majorem quam Z;) erit ratio irrationalis C ad Z major ratione irrationali A ad B.

Jam vero, quia C ad aliquam X minorem rationem habet quam A ad B; & rursus, quia C ad aliquam Z majorem rationem habet quam A ad B; manifestum est etiam C ad aliquam D mediam inter X & Z eandem habere rationem, quam A ad B. Quod quidem perinde clarum est lumine naturali, atque istud: dabile est majus quam P, & dabile est minus quam P, ergo dabile est æquale aliquod ipsi P.

*Quid in proportionum æqualium definitione
Euclidea desideretur.*

Quod ad Euclidem attinet, is duas proportionēs A ad B, Fig. 21. C ad F æquales esse dicit, cum antecedentium quæcumque æque multiples I, Q, consequentium quibuscumque æque multiplicibus L, R, vel simul majores sunt, vel simul minores, vel simul æquales: hoc est cum I superante L, etiam Q semper superat R; & cum I superatur ab L, etiam Q semper superatur ab R; & cum I est æqualis L, etiam Q semper est æqualis R. Ubi bene notandum est, Euclidem non assumere æque multiplicum excessus defectumque proportionales, sed similes, sic enim inepte idem per idem explicasset; sed excessus & defectus simpliciter. Nihilominus hic aliquid in summo Geometra desiderari jam supra declaravimus. Nam vel cupit hisce verbis rationes æquales definire, & sic rei definitæ proprietatem pro definitione assert; evidens quippe est, hanc multiplicum affectionem ex rationum æqualitate provenire: vel adducit tanquam indicium primum & infallibile rationum æqualium; & sic demonstrare debuerat, eam cum rationum æqualitate ita semper esse connexam, ut hæc ex illo certo possit inferri. Quæ quidem connexio & perobicura & demonstratu difficilis est: vel denique per rationum æqualitatem nihil aliud intelligit, quam simultaneum illum excessum defectumve multiplicum; Et sic toto s. ac 6. libro, cum quatuor magnitudines proportionales esse demonstrat, nihil scimus aliud, quam dictum excessum & defectum illis competere, incerti plane, utrum magnitudines de quibus agitur, sint veræ proportionales.

*Proportionum equalium aliud indicium primum
& infallibile assignatur.*

Quod si rationum æqualium desideretur indicium infallibile, & facile, & primum; nos tale assignabimus, demonstrabimusque theor. 5. & 6. partis 2. estque ejusmodi.

Fig. 26.
(a) Majoris
inequalita-
tis.

Rationes (a) æquales sunt (AB ad CF; GM ad NQ) quando & consequentes ipsæ, & consequentium similes partes aliquotæ quæcunque in antecedentibus æquali semper numero continentur.

Ut si una decima ipsius CF contineatur in AB ducenties, una quoque decima NQ contineatur ducenties in GM, & si una centesima CF contineatur millies in AB, etiam una centesima NQ contineatur millies in GM, & sic deinceps in infinitum; erit AB ad CF, ut GM ad NQ.

Inæquales autem rationes sunt, quando aut consequentes ipsæ, aut consequentium aliquæ similes aliquotæ in antecedentibus inæquali numero continentur. Et illa ratio major est, cujus vel consequens, vel consequentis aliquota, sæpius continetur in antecedente.

Fig. 26.

Ut si una centimillesima CF sæpius contineatur in AB, quam una centimillesima NQ, in GM, erit ratio AB ad CF major ratione GM ad NQ, quamvis innumeræ aliz consequentium CF, NQ similes aliquotæ in antecedentibus AB, GM æquali numero continerentur.

Porro æquali numero contineri dicuntur, cum ablatæ quoties possunt, æquali numero sunt ablatæ.

Ex hoc indicio, rationum irrationalium æqualitas & inequalitas continuo elucescit, cum sic antecedentes consequentibus incommensurabiles, per ablata consequentibus commensurabilia & proportionalia exhauriantur.

7. Similes partes sunt, quæ in suis totis æque, seu eodem modo continentur, ut qualis pars sui totius est una, talis pars sui totius sit altera. Quod sane nihil aliud est, quam partes ad sua tota eandem habere rationem.

Similes vero partes aliquotæ sunt, quæ sua tota æqualiter metiuntur; ut si utraque sit sui totius una tertia, una decima, &c.

Fig. 6.

8. Magnitudines (A, B, C, D) continue proportionales dicuntur, cum medii termini (B, C) bis sumuntur; hoc est cum sunt consequens respectu præcedentis, & antecedens respectu sequentis.

Continuas rationes sic efferimus. A est ad B, ut B ad C; & B est ad C, ut C ad D; & sic deinceps.

9. Mag-

9. Magnitudines discretim proportionales sunt, cum nullus terminus bis accipitur.

Discretas rationes sic efferimus. A est ad B, ut C ad F. Cum Fig. 1.
plures fuerint proportionales magnitudines quam tres, si proportionales dicantur, semper intelligitur discretim.

10. Cum magnitudines (A, B, C, D) fuerint continue proportionales, prima (A) ad tertiam (C) habere dicitur rationem duplicatam ejus rationis, quam eadem prima (A) habet ad secundam (B:) & prima (A) ad quartam (D) rationem habere dicitur triplicatam ejus, quam eadem prima habet ad secundam (B:) & sic deinceps. Fig. 6.

[Si vero ratio aliqua triplicata sit alteri rationi duplicata equalis; erit ratio simplex posterior, rationis simplicis prioris sesquuplicata seu sesquialtera. Sins A, B, C, D $\propto$; & a, b, c $\propto$; & sit A prima ad D quartam in priore analogia, ut a prima ad c tertiam in secunda analogia; dico quod a est ad b in ratione sesquialtera rationis A ad B. Sit enim F inter B & C, seu quod perinde est, inter A & D media proportionalis: ob aequales rationes A ad D & a ad c, & medias proportionales utrinque F & b. Erit A: F :: a: b. Sed ratio A ad F componitur ex ratione integra A ad B & ex dimidiata quoque ejusdem ratione B ad F atque adeo ratio a ad b rationi A ad F aequalis, continet rationem A ad B integram, & etiam rationem ejusdem dimidiatam, nempe rationem B ad F. Ratio vero integra & dimidiata dicitur ratio sesquuplicata seu sesquialtera. Est ergo a ad b in ratione sesquuplicata seu sesquialtera A ad B. Sic sane in Astronomicis, cum cubi distantiarum planetarum a Sole eam inter se rationem habent quam temporum periodicorum quadrata; ita ut triplicata distantiarum ratio eadem sit cum ratione temporum periodicorum duplicata; dici solet, tempora ipsa periodica esse inter se in ratione sesquuplicata seu sesquialtera distantiarum a Sole.]

11. Homologæ, seu similes ratione magnitudines dicuntur antecedentes antecedentibus, consequentes consequentibus.

Ut si A est ad B, ut C ad F; homologæ erunt A, C, & B, F. Fig. 1.

Reliquæ definitiones commodius ex ipsis propositionibus intelligentur.

Quintus liber propositiones complectitur 15. Ex his 10. non alium usum habent, quam ut reliquæ earum ope per multiplices demonstrantur. Illis igitur prætermis, 15. reliquas proponemus solas, Euclidis ordine non mutato. Porro hujus libri theorematum non solis lineis, sed omnibus omnino quantitatis conveniunt. Lineæ igitur, quibus hic utimur, omne genus quantitatis representant.

Axioma.

Datis tribus quantitibus A, B, C , dabilis est quarta Z , ad quam C eam proportionem habet, quam A habet ad B .

PROPOSITIO I, II, III, IV, V, VI.

In nostra methodo sunt superfluae.

PROPOSITIO VII.

Fig. 7.

Si quantitates A & B fuerint aequales, & alia quapiam detur Z : erit A ad Z , ut B est ad Z , & Z erit ad A , ut eadem Z est ad B .

Hæc propositio uti & sequentes quatuor, sunt merissima axioma, ac proinde nullo modo demonstrari debent.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 8.

Si quantitates $(C$ & $F)$ fuerint inæquales; major C ad tertiam Z maiorem habebit rationem, quam minor F habeat ad eandem Z .

Et Z ad maiorem C minorem habebit rationem, quam eadem Z habeat ad F , quæ minor est quam C .

PROPOSITIO IX.

Fig. 7.

Si A & B ad Z eandem habeant rationem, æquales sunt A & B .

Et si eadem Z ad A & B eandem rationem habeat, rursus A & B æquales erunt.

PROPOSITIO X.

Fig. 8.

Si C ad Z maiorem rationem habeat, quam B ad Z ; erit C maior quam F .

Et si Z ad F maiorem rationem habeat, quam eadem Z ad C ; erit F minor quam C .

PRO-

PROPOSITIO XI.

Rationes, quæ eidem rationi sunt æquales, eadem, Fig. 9.
similes, (idem omnia significant) sunt æquales,
eadem, similes inter se.

Ut si tam ratio A ad B, quam ratio C ad F, sint æquales
rationi X ad Z, erunt quoque rationes A ad B, & C ad F
æquales inter se. Sive si A sit ad B, ut X ad Z; & C sit ad
F, ut X ad Z; erit quoque A ad B, ut C ad F.

Eodem modo rationes, quæ æqualibus sunt æquales, inter
se sunt æquales.

PROPOSITIO XII.

Si singula magnitudines quocunque (A, B, C,) Fig. 10.
eandem habuerint proportionem ad singulas tota-
dem (F, I, L:) quam proportionem habent singula ad
singulas, sive una (A) ad unam (F:) eandem habe-
bunt omnes (A, B, C) simul sumptæ, ad omnes (F, I, L.)
simul sumptas.

Rem per se manifestam exemplo tantum aliquo rationali de-
claro; ut si singulæ A, B, C, singularum F, I, L, sint triplæ
(hoc est si singulæ ad singulas eandem habeant rationem quam
3. ad 1.) etiam A, B, C simul sumptæ, simul sumptarum
F, I, L triplæ erunt, (hoc est, etiam A, B, C simul sumptæ
ad F, I, L simul sumptas rationem habent eandem, quam 3.
ad 1.) In proportionem irrationali res æque clara est.

PROPOSITIO XIII. & XIV.

In nostra methodo sunt superflua.

PROPOSITIO XV.

Aliquotæ similes (F, I) eandem inter se rationem Fig. 10.
habent quam tota (AB.)

Et universim, partes similes (C, F) sunt inter se ut Fig. 11.
tota (A, B.)

Vere instar axiomatis haberi potest, si recte intelligatur
quid sint partes similes. Vide defin. 7.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

Fig. 11. vol. 1.

SI prima (A) sit ad secundam (B ;) ut tertia (C) ad quartam (F ;) etiam permutando erit prima (A) ad tertiam (C ;) ut secunda (B) ad quartam (F .)

Ponantur B & F esse minores quam A & C ; nam si A & C quales sint, res patet. Quoniam A ponitur esse ad B , ut C ad F , erunt per defin. 7. B & F , totorum A & C partes similes; ac proinde per preced. quam proportionem inter se habent tota A , C , eam quoque habent partes similes B , F ; hoc est, A est ad C , ut B ad F .

Scholium.

SI A est ad B , ut C ad F ; etiam invertendo erit ut B ad A , sic F ad C . Per se patet.

Apud Euclidem hoc est corollarium prop. 4. quae cum in nostra methodo tanquam superflua sit omissa, visum est corollarium illud hoc loco ponere.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 12.

SI antecedenti unum (AB) sit ad consequens (CB ;) ut antecedens alterum (FI) ad consequens alterum (LI ;) etiam dividendo erit (AC) excessus antecedentis primi supra suum consequens, ad idem consequens (CB ;) ut (FL) excessus antecedentis secundi supra consequens secundum, ad secundum consequens (LI .)

Axiomatis instar assumi potest: si tota AB , FI eandem rationem habeant ad X & Z , etiam similibus partibus multiplicata, eandem ad X & Z pergent habere rationem: hoc est, adhuc AB sic multiplicata erit ad X , ut FI sic multiplicata ad Z . Id vero est quod asserit propositio. Nam quis ponitur AB esse ad CB , ut FI ad LI , erunt (a) CB , LI similes partes totorum AB , FI ; & AC , FL erunt tota similibus partibus multiplicata. Cum ergo tota habuerint ad CB , LI eandem rationem, etiam AC , FL , (hoc est tota similibus partibus multiplicata) pergent ad CB , LI eandem inter se habere rationem; hoc est, adhuc erit AC ad CB , ut FL ad LI .

PROQ.

PROPOSITIO XVIII.

SI antecedens unum (AC) sit ad consequens unum (CB,) ut antecedens alterum (BE) ad consequens alterum (LI,) etiam componendo erit (AC cum BC) primum antecedens cum suo consequente, ad idem consequens (CB,) ut (FL cum LI) secundum antecedens cum suo consequente, ad consequens (LI.)

Rursum enim instar axiomatis assumi poterit: si duæ quantitates AC, FL, eandem ad X & Z habeant rationem, etiam AC, FL similiter, seu proportionaliter auctæ, pergent ad X & Z eandem habere rationem: hoc est, adhuc erit AC sic aucta ad X, ut FL sic aucta ad Z. Id vero est quod propositio asserit. Nam ponitur AC esse ad CB, ut FL ad LI. Quare si ipsis AC, FL addantur CB, LI, erunt AC, FL proportionaliter, seu similiter auctæ. Cum igitur AC, FL eodem modo se habeant ad CB, LI, etiam cum similiter fuerint auctæ (hoc est ipse jam AB, FI) pergent ad eandem CB, LI eodem modo se habere; hoc est, adhuc AB erit ad CB, ut FL ad LI.

Corollarium 1.

SI antecedens unum (AB) fuerit ad consequens (CB,) ut FI ad LI, antecedens alterum (FI) ad consequens alterum (LI) etiam antecedens primum (AB) erit ad (AC) excessum suum supra consequens, ut antecedens alterum (FI) est ad (FL) excessum suum supra consequens alterum (LI.)

Cum enim AB sit ad CB, ut FI ad LI, erit dividendo (a) AC ad CB, ut FI ad LI. & invertendo (b) BC ad CA, ut LI ad LF. & componendo (c) BA ad CA, ut FI ad LF. Hæc argumentatio vocatur *inversio rationis*.

(a) Per 17.
L. 5.
(b) Per schol.
9. 16. L. 5.
(c) Per 18. L. 3.

Corollarium 2.

SI AC est ad AB, ut FL ad FI; erit quoque AC ad CB, Fig. 12.

Quia FL ad LI, & AB ad CB, ut FI ad LI.

Cum enim sit ut AC ad AB, sit FL ad FI, erit invertendo BA ad CA, ut IF ad LF: & dividendo (d) BC ad CA, ut (d) per 17. IL ad LF: & rursum invertendo AC ad CB, ut FL ad LI.

& componendo (e) AB ad CB, ut FI ad LI.

(a) Per 18.
L. 5.

H

PRO.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 12.

SI ut totum (AB) est ad totum (FI), ita ablatum (CB) sit ad ablatum (LI), etiam ut totum est ad totum, ita reliquum (AC) erit ad reliquum (FL).

Omnino clarum est per se. Potest tamen ex precedentibus sic ostendi: quoniam AB est ad FI , ut CB ad LI ; erit per-

- (a) Per 16. mutando (a) AB ad CB , ut FI ad LI . Ergo per conversionem rationis AB est ad AC , ut (b) FI ad FL . Ergo permutando (c) ut AB ad FI , ita AC ad FL .
 (b) Per corol. 1. preced.
 (c) Per 16.
 L. 5

PROPOSITIO XX. & XXI.

In nostra methodo sunt superflic.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 13.

SI fuerit A ad B , ut O ad Q ; & B ad C , ut Q ad R , & sic deinceps: erit ex æquo ut A prima ad C ultimam, ita O prima ad ultimam R .

- (d) per hyp. Ponebantur C , R esse minores quam B , Q : eadem foret ostensio, si majores ponerentur. Quoniam (d) B est ad C , ut Q ad R ; erunt C , R totorum B , Q (e) partes similes. Cum igitur A & O ad B & Q eandem habeant rationem; habebunt quoque ad C & R , quæ sunt ipsorum B & Q partes similes, eandem rationem. Instar enim axiomatis est, si due quantitates ad alias duas eandem inter se habuerint rationem, etiam ad partes earum similes, eandem inter se habere rationem.

Si plures fuerint utrimque quantitates quam tres, eodem ratiocinio procedatur ad reliquas.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 14.

SI fuerit ut A prima ad B secundam, ita O prima ad Q secundam; & ut B secunda ad C tertiam, ita tertia quæpiam R ad primam O ; erit ex æquo [perturbate] ut A prima ad C tertiam, ita R tertia ad Q secundam.

Ut

Ut B est ad C, ita (a) potest Q esse ad aliquam quampiam (a) Per axio.
S. Jam quia ut B ad C, sic (b) R est ad O, & ut B ad C (c) ante 1. h. 5.
sic Q est ad S; erit R ad O, (d) ut Q ad S. Igitur perma- (b) Per hyp.
tando (e) R est ad Q, ut Q ad S. Deinde, quia O est ad Q, (c) Per const.
ut (f) A ad B, & Q est ad S, (g) ut B ad C; ex æquo erit Q (d) Per 11.
ad S, ut (h) A est ad C. Sed jam ostendi R esse ad Q, ut O (e) Per 16.
est ad S. Ergo etiam (i) R est ad Q, ut A ad C. (f) Per hyp.
(g) per const.
(h) Per prae.
(i) Per 18.
h. 5.

Vocatur a Geometris hæc ratio perturbata.

PROPOSITIO XXIV.

SI fuerit ut A ad B, ita C ad F; & ut I ad B, Fig. 15.
ita L ad F: erit ut A cum I ad B, ita C
cum L ad F.

Quoniam I per hyp. est ad B, ut L ad F; erit quoque (a) (a) Per schol.
invertendo B ad I, ut F ad L. Cum igitur A sit ad B, (b) p. 16. l. 5.
ut C ad F, & B ad I, ut F ad L; ex æquo erit (c) ut A ad I, (b) Per hyp.
sic C ad L. Igitur (d) componendo ut A I est ad I, sic C L (c) Per 22. l. 5.
est ad L: I vero est ad B, (e) ut L ad F. Rursum igitur (f) (d) Per 18.
ex æquo A I est ad B, ut C L ad F. (e) per hyp.
(f) Per 22.
l. 5.

PROPOSITIO XXV.

SI quatuor magnitudines (AB, CF, I, L) fu- Fig. 16.
erint proportionales; maxima (AB) & minima
(L) duabus reliquis (CF, I) majores erunt.

Sit AB ad CF, ut I ad L. Ex maxima AB sumatur AQ
æqualis I; & ex CF sumatur CR par minime L. Erit igitur
AB tota ad totam CF, ut ablata AQ ad ablatam CR. Ergo
reliqua QB est ad reliquam (g) RF, ut tota AB ad totam (g) Per 19.
CF. Sed AB major (h) est quam CF. Ergo & QB ma- (h) per hyp.
jor quam RF. Jam vero quia AQ ipsi I, & CR ipsi L æ-
quales sunt; etiam AQ cum L, ipsi I cum CR æquales e-
runt. Quare si ad AQ cum L, addatur majus QB, & ad I
cum CR addatur minus RF; erit totum AQB cum L, ma-
jus toto I cum CRF. Quod erat demonstrandum.

Quæ sequuntur non sunt propositiones Euclidis, sed ex
Pappo Alexandrino, aliisque desumptæ, ob frequentem earum
usum Euclidis subjungi solent.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 17.

SI prima (A) ad secundam (B) majorem rationem habeat, quam tertia (C) ad quartam (F); habebit invertendo (B) secunda ad (A) primam, minorem rationem, quam (F) quarta ad (C) tertiam.

Quoniam ponitur A habere ad B majorem rationem, quam
 (a) Per axio. C ad F. Ignitur A ad (a) aliquam BX (quae (d) major erit
 ante 1. l. 5. quam B) eandem habebit rationem, quam C ad F. Inver-
 (b) Per 10. l. 5. tendo igitur erit BX ad A, ut F ad C; ac proinde (e) B ad
 (c) Per 8. l. 5. A in minori ratione erit, quam F ad C.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 17.

SI A habet ad B majorem rationem quam C ad F; etiam permutando A ad C majorem rationem habebit, quam B ad F.

Quoniam ratio A ad B ponitur major ratione C ad F.
 (d) Per axio. erit (d) ratio A ad aliam BX (quae necessario major est
 ante 1. l. 5. quam (e) B) equalis rationi C ad F. Jam igitur (f) per-
 (e) Per 10. mutando A erit ad C, ut BX ad F. Sed BX ad F est in
 l. 5. majori ratione, (g) quam B ad F. Ergo etiam A est ad C
 (f) Per 16. in majori, quam B ad F.
 l. 5. (g) Per 8. l. 5. Idem similiter demonstrabitur de proportionem minori.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 18.

SI AB ad BC majorem rationem habeat, quam FI ad IL; etiam componendo AC ad BC majorem rationem habebit, quam FL ad IL.

Quoniam ponitur AB ad BC esse in majori ratione, quam
 (h) Per axio. FI ad IL; Ergo (h) alla OB (quae necessario erit minor
 ante 1. l. 5. (i) quam AB) est ad BC, ut FI ad IL. Ergo (k) com-
 (i) Patet ex ponendo OC est ad BC, ut FL ad IL. Ergo AC est ad
 10. l. 5. BC in (l) majori, quam FI ad IL.
 (k) Per 18. l. 5. Idem similiter demonstrabitur de proportionem minori.
 (l) Per 8. l. 5.

PROPOSITIO XXIX.

SI AC ad BC maiorem rationem habet, quam FL ad IL; etiam dividendo AB ad BC maiorem habet rationem, quam FI ad IL.

Quia ponitur AC ad BC maiorem habere rationem, quam FL ad IL; Ergo (a) alia OC (quæ necessario minor erit (a) *Per axio. ante 1. l. 5.* (b) quam AC) erit ad BC, ut FL ad IL. Jam igitur erit dividendo (c) OB ad BC, ut FI ad IL. Ergo AB est ad BC in (d) maiori, quam FI ad IL. (b) *Per 10. l. 5.* (c) *Per 17. l. 5.* (d) *Per 8. l. 5.*

Idem similiter demonstrabitur de proportionem minori.

PROPOSITIO XXX.

SI AC ad BC maiorem rationem habet, quam FL ad IL; convertendo habebit AC ad AB maiorem, quam FL ad FI.

Quoniam AC est ad BC in maiori, quam FL ad IL; erit dividendo (a) AB ad BC in maiori, quam FI ad IL. (a) *Per 29. l. 5.* Ergo invertendo (b) CB ad BA, est in minori, quam LI ad IF. (b) *Per 26. l. 5.* Ergo componendo (c) CA est ad BA in minori, quam LF ad IF. (c) *Per 28. l. 5.*

PROPOSITIO XXXI.

SI AB ad C maiorem rationem habeat, quam F ad I; & C ad LQ maiorem rationem habeat, quam I ad S; & sic deinceps; etiam [ex æquo] prima AB ad ultimam LQ maiorem rationem habebit, quam prima F ad ultimam S.

Quoniam AB est ad C in maiori, quam F ad I; Ergo alia (a) quæpiam OB (quæ necessario minor (b) erit quam (a) *Per axio. AB) ad C, ut F ad I. Et quia C est ad LQ in maiori (b) *Per 10. l. 5.* quam I ad S; Ergo C ad aliam quæpiam LR (quæ erit necessario maior quam LQ) est ut I ad S. Igitur ex æquo (c) OB est ad LR ut F ad S. Ergo OB est ad LQ in (c) *Per 22. l. 5.* maiori quam (d) F ad S. Ergo AB est ad LQ (e) in (d) *Per 8. l. 5.* multo maiori, quam F ad S. (e) *Per 22. l. 5.**

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 19.

SI AB ad C maiorem rationem habet, quam I ad S , & C ad LQ maiorem quam F ad I , etiam ex æquo [perturbate] habebit maiorem rationem AB ad LQ , quam F ad S .

Demonstratio eadem quae praecedentis, sed pro 22. citetur 23.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 12.

Si tota (AB) ad totam (FI) majorem rationem habuerit, quam ablata (CB) ad ablatam (LI); tota ad totam minorem rationem habebit, quam reliqua (AC) ad reliquam (FL.)

Quia AB est ad FI in majori, quam CB ad LI;

(e) Per 27.13 (a) permutando etiam $A B$ et $C B$ in maiori, quam $E I$

(b) Per 30.15.11. Ergo convertendo (b) A Best ad A C in minori, quam

(c) *Passa em FI ad FL.* Ergo etiam permutando (c) AB em ad FI, m

minority groups. A.C. and F.L. O.E. has a very obvious line

1. The first part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 1, 1861. It is a copy of the original, and is signed by the President.

PROPOSITIO XXXIV.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 20.

S*I rationes (A ad C; & E ad O) sunt equa-*
lium vicinarum (A ad B & E ad F) duplicate,
aut triplicate & sic deinceps; equales sunt etiam ipse.

(a) *Per defn.* Quia ratio A ad C duplicata est rationis A ad B; erit (a) ut
10. l. 5. A ad B, sic B ad C. Ob eandem causam erit ut E ad F.

fic F ad O. Cum ergo sit ut A ad B, sic per hyp. E ad F;
& ut B ad C, sic F ad O, nam ut B ad C, sic A ad B, hoc

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 20.

Rationes equales A ad C & E ad G , sunt dupli-
catae, aut triplicate, & sic deinceps, rationem
 A ad B , & E ad F ; etiam he equales erunt.

Si negas, fit ut A ad B, sic E ad aliam Z inaequalem ipsi F,
& fiat ut E ad Z, sic Z ad X. Quoniam igitur rationum æ-
qualium

qualium A ad B, & E ad Z duplicatae (a) sunt rationes A ad (a) Per defini-
C, & E ad X; etiam ratio E ad X aequalis erit (b) rationi 10. 1.5.
A ad C, hoc est per hyp. rationi E ad O. Ergo (c) aquantur (b) Per prac.
O & X. Ergo patet etiam medias F & Z aequales esse. Ergo (c) per 9.
A est ad B, ut E ad F seu Z. Quod erat demonstrandum.

Ex contradictorio assertionis, directe illata est assertio.

P A R S S E C U N D A.

*Euclidea per multiplices definitio equalium rationum,
demonstratur: exhibeturque ac demonstratur aliud
magis immediatum, & facilius indicium equalitatis
rationum.*

PROportionum elementis methodo (nisi fallor) commodi-
ori explicatis, reliquum est, ut quod secundo loco supra
sumulam, praeferre ageretur. Hoc igitur loco (quod a nullo
hactenus factum est) demonstrabimus, nihil assumendo, nisi
quod per se lumine naturae sit manifestum, duas rationes in-
ter se aequales esse, quando antecedentium quilibet aequemul-
tiplices, consequentium aequemultiplicibus, semper sunt vel
pariter majores, vel pariter minores, vel pariter aequales. Cu-
jus quidem negotii cum facta ardua, atque prolixa sit demon-
stratio, ut jam reipsa cognoscemus, facile apparebit propositere
egisse Euclidem, qui equalitatis rationum primum, & funda-
mentale indicium sumi voluit ex hac multiplicum indemon-
strata hactenus proprietate, cuius tam remota & obscura sit
cum rationum equalitate connexio.

Lemma I.

SIT A ad B, ut C ad F, & sint antecedentium A, C, Fig. 21.
quolibet aequemultiplices I, Q, nimirum vel duplae, vel
triplae &c sic deinceps. Sint item consequentium B, F quali-
bet aequemultiplices L, R.

Erit quoque ut I ad L, sic Q ad R.

Quoniam enim A est ad B, ut C ad F, etiam I dupla ipsius
A erit ad B, ut Q dupla ipsius C est ad F: & I, tripla A erit
ad B, ut Q tripla C, ad F, & sic in infinitum. Quod qui-
dem aequale est per se clarum ac quodlibet axioma. Quoniam
igitur I est ad B, ut Q ad F, erit quoque I ad L duplam ip-
sius B, ut Q ad R duplam ipsius F; & ut I ad L, triplam ip-
sius

quater, æquatur FO toties sumptæ, quoties Q est in AC, nempe sexies. Deinde quia residuum OI est minus una particula, hoc est quam Q, erit OI toties accepta, quoties Q est in AC, nempe sexies, adhuc minor quam AC. Uterius quid BC minus sæpe auferri possit ex AG, quam Q, ex FI, (posita quippe sit DG et AC auferri tantum posse res, Q vero quater ex FI.) manifestum est BC toties sumptum, quoties Q in FI, nempe quater, majus fore quam AC, ac proinde multo majus esse quam OI sumptum sexies, quod ostendit supra esse minus quam AC. Atqui ostendimus est AG sumptum quater, & FO sumptum sexies esse æqualia. Quare si AC sumpto quater addatur BC quater, & ad FO sexies sumptum addatur OI sexies, erunt 4. AC & 4. BC, hoc est 4. AB majora, quam 6. FO & 6. OI, hoc est quam 6. FI. Quia vero 4. AC æqualia erant 6. FO, erunt 4. AC minora 6. FI. Sed ut AC ad FI, ita ponatur supra L, esse ad R. Ergo per lem. 2. etiam 4. L minora sunt quam 6. R. Accepta sunt igitur antecedentium AB & L, æque multiplices, nempe quadruplex, item æque multiplices consequentium FI & R, nempe sexuplex, & tamen ostendimus est multiplicem antecedentis AB (nempe 4. AB) superare multiplicem consequentis FI (nempe 6. FI) multiplicem vero antecedentis L (nempe 4. L) non excedere multiplicem consequentis R (nempe 6. R.) Quod erat demonstrandum.

Theorema 2.

Si antecedentium (A, C) quolibet æque multiplici- Fig. 21.
ces, quibuslibet consequentium (B, F) æque multiplicibus, sint vel simul majores, vel simul minores, vel simul æquales, ratio (A ad B) rationi (C ad F) æqualis erit.

Si negas, sit ratio A ad B major ratione C ad F. Ergo per theor. præced. poterunt antecedentium A, C sumi tales utque multiplices, item tales consequentium B, F æque multiplices, ut multiplex antecedentis A excedat multiplicem consequentis B, multiplex antecedentis C non excedat multiplicem consequentis F, quod est absurdum, quia evertit hypothesis. Ergo &c.

In hac demonstratione, uti & in sequentibus, ex solam propositiones ex quinto libro adhibentur, quæ per se æque sunt manifestæ, atque ipsa axiomata.

Theorema

Fig. 24.

Theorema 3.

Si sunt positi antecedentium (O, R) tales æque multiplices, itemque tales æque multiplices consequentium (Q, S) ut multipla antecedentis unius (O) superant multiplicam consequentis (Q) multipla antecedentis alterius (R) non excedat multiplicam sui consequentis (S) ; erit ratio $(O$ ad $Q)$ cuius antecedens inimplex superat multiplicam consequentis, major ratione altera $(R$ ad $S)$.

Rationes illas inæquales esse sic ostendo. Si essent æquales, quicumque antecedentium æque multiplices (ut patet a fortiori ex lemmate primo) quibuscunque æque multiplicibus consequentium, vel simul maiores essent, vel simul minores, quod est absurdum, non evadit hypothefim.

Si autem ratio O ad Q maior sit, cuius antecedens inimplex superat, sic ostendo. Si negas, sit ratio R ad S major ratione O ad Q . Ergo per theor. 1. tales accipi possunt antecedentium R & O æque multiplices, talisque item æque multiplex consequentium S ad Q ut multipla antecedentis R rationis majoris, excedente multiplicam consequentis S ; multipla antecedentis O non excedat multiplicam consequentis Q ; non autem tales (quod facile ex 1. lem. ostenditur,) ut multipla O excedente multiplicam Q , multipla R non excedat multiplicam S . Quod est absurdum, cum evadat hypothefim.

Fig. 25.

Theorema 4.

Cum proportio irrationalis est, nulla multiplex antecedentis ulli consequenti multiplici æqualis esse potest. Quare, cum per multiplices inquiratur proportionum irrationalium æqualitas, solummodo multiplicium simultaneum excessus, defectusque spectari debent.

Sit proportio irrationalis A ad B . Si A aliquoties sumpta posset fieri æqualis B aliquoties sumptæ, ac proinde eandem ambæ efficere quantitatem Z : singulæ A & B essent eadem Z commensurabiles, ac proinde & commensurabiles inter se, contra hypothefim.

Quia tamen secundum theorema tam ad rationales proportionēs

tiones pertinet; quam ad irrationales, simultaneo excessui & defectui equalitatem simultaneam addidimus cum Euclide.

Demonstratis hunc in modum, quæ ab Euclide def. 5. & 6. ponuntur, jam omnes ejus quinti & sexti libri demonstrationes subsistunt: patetque multiplicium illum excessum defectumque simultaneum, infallibile indicium esse equalitatis rationum, non quidem per se immediate, sed demonstratione, quam modo dedimus, prius rite intellecta.

Verum quia indicium per multiplices, quantumvis jam securum, nihilominus remotum est & implexum, hic aliud clarissimum & proximum, quod promisi supra, demonstrabo.

Theorema

Si consequentes (CF, NQ,) & consequentibus quilibet Fig. 26.
duobus aliquota similes; puta ex decima & centesima
(5. millefima, & ita deinceps sine termino) in antea-
cedentibus (AB, GM) equali quoti, summe contin-
entur; rationes (AB ad CF, & GM ad NQ)
equales erunt.

Nota, equali numero contineri dicuntur, cum, si auferantur quoties possunt, equalis est reliquus numerus ab altero.

Demonst. Si negas, erit ratio alterutra, puta AB ad CF, major ratione GM ad NQ. Quia igitur AB potuit ad CF majorem habere rationem quam GM ad NQ, manifestum est aliquam (puta AD) minorem quam AB, equaliter habere rationem ad CF, quam GM ad NQ. Manifestum similiter est, aliquam ipsius CF aliquotam (ex gr. unam trigesimam) esse minorem differentia DB. Sit CE una trigesima ipsius CF, & auferatur ex AB quoties potest, ex. gr. milles, totumque ablatum sit AO. Quoniam igitur AO est 1000. CE, & CF est 30. CE, erit AO ad CF ut 1000, ad 30.

Sumatur jam ex NQ aliquota NP, similis alteri CE, nempe etiam una trigesima. Quoniam ex hyp. CE, NP equali numero in AB, GM continentur, & CE ablata ex AB quoties potuit, ablata fuit milles, etiam NP ex GM auferri poterit milles. Quia ergo totum ablatum GK est 1000. NP, & NQ est 30. NP, erit GK ad NQ ut 1000. ad 30. hoc est ut AO ad CF. Quis vero CE ablata ex AB quoties potuit, reliquit OB, erit OB minus quam CE. Sed CE, nempe una trigesima CF, est minor posita quam DB. Ergo OB est multo

multo minor quam DB. Ergo AO est major quam AD.
 Ergo AO ad CF maiorem rationem habet quam AD ad
 CF. Sed ponebatur esse AD ad CF, ut GM ad NQ. Er-
 go AO ad CF maiorem rationem habet, quam GM ad
 NQ: hoc est multo maiorem quam GR ad NQ. Quod est
 absurdum, quia ostendit supra AO esse ad CF ut GR ad
 NQ. Non possunt igitur rationes inter AB ad CF & GM
 ad NQ esse inaequales. Aequales igitur sunt. Quod erat de-
 monstrandum.

Theorema 6.

Fig. 16.

Si aut consequenti (CF, NQ) aut consequentium
 reliqua similia adposita, (ex. d. d. d. d.) in
 antecedente in antecedentibus (AB, GM) continen-
 tur, erit ratio (AB ad CF) ut (GM ad NQ)
 inaequalis, et si illa adposita, alijs consequen-
 tijs adposita similia continetur.

Continetur CE decima una ipsius CF, in AB mille,
 & in AO 1000. CE, autem vero residuum CB erit totius
 AB una CE. Denique NP una decima NQ, continetur
 in GM, tantum nonaginta nonagiet septies, & sit GK, 999.
 NP, erit residuum CM fore minus una NP, ac proinde
 minus NP fore maiorem quam GM. Si ergo GR, 1000.
 NP. Quoniam igitur AO est 1000. CE, & GR, 1000.
 NP, CF vero, 10. CE, & NQ, 10. NP, erit AO ad CF,
 ut GR ad NQ. Ergo AB est ad CF in maiori ratione, quam
 GR ad NQ, ac proinde in multo maiori, quam GM ad
 NQ. Quod erat demonstrandum.

Habemus autem quoniam demonstratum, facillimumque inditum,
 ex quibus rationes aequales inaequalesque, certo licet differre.
 Et possumus etiam, omnes, quae eodem axiomata non
 sunt, i. e. propositiones, quas per multiplices Euclides de-
 monstrat, multo expeditius demonstrare, nisi magis ex usu
 discendum putarem, illas ea methodo, qua in prima par-
 te, ubi iam sumus, proponere.

TERTIA PARS.

De proportionum denominatoribus, algorismo, compositione.

I.

Proportionis Divisio.

Prima divisio est in rationalem & irrationalem, ut dictum def. 4. Rationalia dividitur in rationem aequalitatis & inaequalitatis. Ratio inaequalitatis dividitur in rationem majoris inaequalitatis, quae habet antecedens majus consequente, & in rationem minoris inaequalitatis, quae habet antecedens minus consequente.

Rationalis proportio inaequalitatis majoris dividitur in quinque species, quae sunt: multiplex, superparticularis, superpartiens, multiplex superparticularis, multiplex superpartiens.

Ratio multiplex est quando major minorem aliquoties continet, ut bis, ter, quater, &c. diciturque ratio dupla, tripla, quadrupla.

Ratio superparticularis est, quando major minorem continet semel, & unam ejus partem aliquotam: ut ratio 3. ad 2. vel 6. ad 4. quae dicitur sesquialtera, quia major minorem continet semel & ejus dimidium: ratio 4. ad 3. live 16. ad 12. quae dicitur sesquialtera, quia major minorem continet semel, & tertiam ejus partem, & sic deinceps.

Ratio superpartiens est, cum major minorem continet semel, & plures ejus aliquotas, non conicientes unam aliquotam. Talis est ratio 8. ad 5. vel 14. ad 10. quia 8. continet 5. semel, & insuper 3. hoc est tres quintas ejusdem numeri 5. quae tamen simul sumptae non coniciunt unam aliquotam ipsius 5. Similiter 14. continet 10. semel, & bis 2. hoc est duas quintas numeri 10. quae tamen simul sumptae (nempe 4.) non coniciunt unam aliquotam ipsius 10. Adhuc porro, non conicientes unam aliquotam, quia alias esset ratio superparticularis.

Ratio multiplex superparticularis est, cum major minorem aliquoties continet, & insuper unam ejus aliquotam, ut ratio 5. ad 3. 10. ad 4. &c.

Ratio multiplex superpartiens est, cum major minorem aliquoties continet, & adhuc plures ejus aliquotas non conicientes unam aliquotam, ut ratio 8. ad 3. 16. ad 6. &c.

II. *De*

II.

De Denominatore Proportionis rationalis.

Denominator proportionis rationalis est, qui distincte & clare exprimit habitudinem unius numeri ad alterum; sive quia ita se habet ad unitatem, ut major ad minorem, ac proinde ostendit, quoties major minorem contineat, & quoties minor contineatur a majore. Rationis 27. ad 9. denominator est 3. quia 3. ita est ad unitatem, ut 27. ad 9. ac proinde ostendit quoties consequens in antecedente continetur, nempe ter.

Cujuscunque rationis denominator invenitur, si major terminus dividatur per minorem, nam quotiens divisionis erit denominator. Ratio est, quia quotiens ita est ad unitatem, ut dividendus ad divisorem, hoc est ut major ad minorem.

Exempl. detur ratio 60. ad 6. Divide 60. per 6. quotiens 10. est denominator. Detur rursus ratio 60. ad 16. divide 60. per 16, fit quotiens $3\frac{3}{4}$. hic est denominator.

III.

De Denominatoribus Proportionum irrationalium.

CUM rationes irrationales fuerint reducte ad rationes communes consequens habentes; communis consequentis antecedentia erunt rationum denominatores, & commune consequens minus ac locum explet unitatis.

Proportionis nullius irrationalis, si sola sit, exhiberi potest denominator. At si duae fuerint, vel plures proportiones irrationales, alio quodam sensu earum denominatores poterunt exhiberi, qui nimirum ostendant, quomodo una ratio ad alteram se habeat. Id quod egregie observavit P. Gregorius a S. Vincentio, operis sui Geometrici lib. 8. def. 2. Qui vir cum praeclarissimis, & prope innumeris inventis Geometriam auxit; tum imprimis libro 8. ejusdem operis de proportionalitatibus ita scripsit, ut novam de proportionalitatibus scientiam condidisse censi merito debeat. Datae sint rationes irrationales A, ad B. & C, ad D, quae revocentur ad rationes FH, GH, habentes commune consequens H, sic ut ratio F ad H sit par rationi A ad B, & ratio C ad D par rationi G ad H; commune consequens H minus explebit unitatis, & antecedentia F, G erunt denominatores rationum F ad H & G ad H (hoc est rationum A ad B, & C ad D,) quia ostendunt

quo-

quomodo una ratio sese habeat ad alteram. Sicut enim F est ad G, ita ratio FH est ad rationem GH, hoc est ratio AB ad rationem CD.

IV.

Axiomata.

AX. 1. Rationes (F ad H, & G ad H) commune habentes consequens (H), eam inter se proportionem habent, quam antecedentia (F, G.) Est prop. 2. P. Gregorii a S. Vinc. lib. 8. quadr. Fig. 28.

Hoc est ratio G ad H, tanto major est ratione F ad H, quanto G major est quam F.

Ax. 2. Rationes (I ad L & I ad M) commune habentes antecedens, reciprocam inter se habent consequentium proportionem. Est propof. 7. P. Gregorii a S. Vinc. lib. 8. quadr. Fig. 29.

Hoc est ratio I ad L, est ad rationem I ad M, ut reciproce est M consequens, ad consequens L: five ratio I ad L tanto major est ratione ejusdem I ad M, quanto L fuerit minor quam M, ac proinde quanto M fuerit major quam L.

Ax. 3. Rationes rationales eam inter se rationem habent, quam denominatores. Patet ex axiom. 1.

Dentur ratio 12. ad 3. & ratio 15. ad 6. quarum denominatores sunt 4. & $2\frac{1}{2}$. Ex defin. * denom. ratio 12. ad 3. est eadem cum ratione 4. ad 1. & ratio 15. ad 6. est eadem cum ratione $2\frac{1}{2}$. ad 1. Sed ratio 4. ad 1. est ad rationem $2\frac{1}{2}$. ad 1. ut $\dagger$ 4. est ad $2\frac{1}{2}$. Ergo etiam ratio 12. ad 3. est ad rationem 15. ad 6. ut denominator 4. est ad denominatorem $2\frac{1}{2}$. * Nam, 2.
 † Per axioma.
 hic.

V.

Rationum rationalium Additio & Subtractio.

Additio perficitur, si rationum denominatores addantur. Ratio enim quam habet denominatorum summa ad unitatem, est rationum datarum summa quesita.

Dentur ratio 12. ad 3. & 15. ad 6. earum denominatores 4. & $2\frac{1}{2}$ additi sibi mutuo faciunt $6\frac{1}{2}$. Ratio $6\frac{1}{2}$. ad 1. est par rationi 12. ad 3. & rationi 15. ad 6. Patet ex Ax. 1. & 3. Fig. 30.

Subtractio fit ablatione minoris denominatoris a majore, nam ratio residui ad unitatem, est ratio quæ remanet post minorem rationem a majori detractam. Patet ex axiom. 1. & 3.

Den-

Dentur rationes 12. ad 3. & 15. ad 6. Harum denominatores sunt 4. & $2\frac{1}{2}$. Aufer minorem $2\frac{1}{2}$. a majori 4. remanent $\frac{1}{2}$. Ratio $\frac{1}{2}$. ad 1. est ea quæ remanet, ubi rationem 15. ad 6. seu $2\frac{1}{2}$. ad 1. detraxeris ex ratione 12. ad 3. seu 4. ad 1.

VI.

Rationum irrationalium Additio & Subtractio.

Fig. 31.

Rationes datæ (A ad B, & C ad D) reducantur ad rationes (F ad H & G ad H) habentes commune consequens (H.) Antecedentia F & G sibi addita sunt FG. Ratio FG ad H est summa rationum F ad H, & G ad H, hoc est rationum A ad B & C ad D. Patet ex axio. 1.

Subtractio perficitur, si rationes datæ ad commune consequens reducantur, ac tum minus antecedens G auferatur a majori F: ratio enim residui ad H, est ea quæ remanet postquam rationem G ad H, seu C ad D subtraxeris a ratione F ad H, seu A ad B. Patet ex 1. axiom.

VII.

Rationum rationalium Multiplicatio & Divisio.

Denominatores rationum per invicem multiplicati, dabunt denominatorem rationis, quæ ex datarum rationum multiplicatione producitur.

Hoc est, ratio quam ad unitatem habet numerus ex denominatorum multiplicatione productus, est ea quæ fit ex rationum multiplicatione. Patet ex Ax. 1. & 3. Nam multiplicatio rationum est unius ad alteram additio sæpius repetita. Hanc autem perficit repetita sæpius antecedentium additio, (hoc est multiplicatio,) patet ex jam citatis axio. 1. & 3.

Fig. 32.

Sint datæ rationes 9. ad 3. & 10. ad 4. denominatores 3. & 5. multiplicati faciunt 15. Ratio 15. ad 1. est ea, quæ ex multiplicatione rationum 9. ad 3. (seu 3. ad 1.) & 10. ad 4. (seu 5. ad 1.) producitur.

Divisio rationum perficitur, si denominator majoris dividatur per denominatorem minoris. Nam ratio quotientis ad unitatem, est ea quæ habetur ex divisione rationis datæ majoris per rationem minorem. Patet ex 1. & 3. axiomate, cum rationis per rationem divisio, sit subtractio unius ab altera sæpius repetita.

VIII. Mul.

VIII.

Multiplicatio rationum irrationalium.

Datae sint rationes A ad B, & C ad D, per invicem multiplicandae. Fiat ut A ad B, ita D ad E. Ratio C ad E est ea, quae producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Fig. 33.

Hæc operatio est Gregorii a S. Vincentio, lib. 8. prop. 75. Sed eam nec ipse, nec alius quisquam demonstrat.

Hunc igitur in modum demonstrabitur. Ratio C ad E producitur ex multiplicatione rationum C ad D, & D ad E, ut patebit ex demonstratione numeri 12. ab his independente. Sed rationes C ad D, & D ad E per const. sunt rationes C ad D, & A ad B. Ergo ratio C ad E est ea quæ fit ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Quod erat demonstrandum.

IX.

Divisio rationum irrationalium.

Data sit ratio C ad E dividenda per rationem A ad B. Fiat ut A ad B, sic C ad D. Ratio D ad E est quotiens. Fig. 33.

Nam ratio C ad D (hoc est per const. ratio A ad B) multiplicata per rationem D ad E producit rationem C ad E, ut patebit ex demonstratione num. 12. ab his independente. Ergo ratio D ad E est quotiens, cum multiplicata in dividendam, quæ est ratio A ad B, restituat rationem C ad E, quæ proponebatur dividenda.

X.

De Compositione rationum, ejus Definitio.

Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates (hoc est denominatores) inter se multiplicatæ aliquam effecerint rationem. Est definitio 5. l. 6. Euclidis.

Dentur rationes quocunque quarum denominatores sint Fig. 34.
1. 3. $1\frac{1}{4}$. Multiplica denominatorem 2. per 3. denom. fit 6. denominator rationis compositæ ex rationibus, quarum denominatores sunt multiplicati. Hoc est ratio 6. ad 1. est composita ex rationibus 6. ad 3. & 12. ad 4. Quod si denominatorem 6. multiplices per denominatorem tertium $1\frac{1}{4}$. fit $7\frac{1}{2}$. denominator rationis compositæ ex tribus datis rationibus, quarum denominatores sunt 2. 3. $1\frac{1}{4}$.

XI.

*Compositio rationum non aliud est quam rationum multiplicatio: & ratio omnis ex iisdem rationibus componitur ex quarum multiplicatione produci-
tur.*

NAM ut patet ex axiomatis n. 4. & ex n. 7. ratio, quæ ex plurium rationum multiplicatione produci-
tur, ea est, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta
habet ad unitatem, seu consequens commune. Atque etiam
per defin. Euclid. ratio, quæ ex pluribus rationibus compo-
nitur, ea est, quam quantitas ex denominatorum multiplica-
tione producta habet ad unitatem seu consequens commune.
Ergo ratio ex iisdem componitur, ex quarum multiplicatione
produci-
tur.

Scholium.

UT numeri sequentis demonstratio clarius percipiat, ob-
servandum est, multiplicari ac dividi magnitudines per
invicem, cum analogia quadam ad numeros. Quemadmo-
dum igitur numerus per numerum multiplicari dicitur, cum
ut est unitas ad alterutrum, ita reliquus sit ad alium quem-
piam, qui productum dicitur; ita plane magnitudo per mag-
nitudinem dicitur multiplicari, cum ut quæpiam recta pro
unitate assumpta se habet ad alterutram datarum, ita reliqua
fiet ad aliquam quartam, quæ productum vocabitur. Pari
modo quemadmodum numerus per numerum dividi dicitur,
quando ut unus est ad alterum, ita unitas fit ad alium, qui
quotiens nominatur; ita quoque magnitudo per magnitudi-
nem dicetur dividi, quando assumpta quantitate aliqua pro
unitate, ut una se habet ad alteram, ita unitas ad aliam, quæ
proinde dicetur quotiens.

XII.

*Si fuerint quæcunque & quotcunque quantitates, seu
magnitudines, seu numeri; ratio prima ad ulti-
mam componitur ex rationibus mediarum.*

IN numeris demonstratum est a Theone, Eutocio, & Vitel-
lione. Qui in magnitudinibus demonstraret, nemo hacten-
us inventus est. Unde Gregorius a S. Vincentio, magnus
Geo-

Geometra, libro 8. ad principium secundum, censet inter principia numerandum esse, donec alicui demonstratio occurrerit, qua inter theorematata referri possit.

Universalem igitur hujus rei demonstrationem dare conabimur hunc in modum.

Demonstratur in magnitudinibus.

Datæ sint magnitudines quæcunque & quotcunque A, B, Fig. 35. C, D. Ostendendum est rationem A ad D componi ex rationibus A ad B; B ad C; C ad D.

Fiat ut B ad C, ita X ad B. Eruntque rationes A ad B: B ad C reductæ ad rationes A ad B, X ad B, habentes commune consequens B, ac proinde rationum denominatores sunt A, X: & consequens commune B (a) munus explet unitatis, (a) per n. 3. quæ est commune consequens respectu omnium denominatorum numericorum.

Itaque si velimus magnitudines A, X per invicem multiplicare, oportebit (b) facere ut B unitas est ad X, ita A ad quartam Z, quæ erit productum multiplicationis A per X, seu X per A, plane ac si cupias invicem multiplicare numeros R, S, sit unitas ad unum numerum S, ita alter R ad quartum V, qui est productum multiplicationis. (b) Schol. præced.

Quoniam igitur quantitas Z est productum ex multiplicatione denominatorum A, X, erit ratio (c) hujus producti Z ad B unitatem, seu commune consequens, ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B; X ad B; prorsus ut in rationum numericarum multiplicatione, numero 7. ostendimus evenire, in qua si denominatores inter se multiplicentur, ratio producti ad unitatem ea est quæ fit ex rationum multiplicatione. (c) Per defin. num. 10.

Atqui per constr. ratio X ad B est ratio B ad C. Ergo etiam ratio Z ad B producitur ex multiplicatione rationum A ad B; B ad C. Quia vero per constr. ut B est ad X, ita A est ad Z, etiam inversim Z ad A, ut X ad B, hoc est, per constr. ut B ad C. Igitur permutando ut Z est ad B, ita A est ad C. Sed jam ostensum rationem Z ad B produci ex multiplicatione rationum A ad B; B ad C. Ergo etiam ratio A ad C producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & B ad C. Atqui num. XI. ostensum est rationes componi ex iisdem rationibus, ex quarum multiplicatione producuntur. Ergo ratio A ad C componitur ex rationibus A ad B, & B ad C.

Eodem modo demonstrabitur ratio A ad D componi ex rationibus A ad C, & C ad D. Ergo ratio A ad D componitur ex rationibus A ad B, & B ad C, & C ad D. Et sic deinceps in infinitum. Quod erat demonstrandum.

Demonstratur in numeris.

$$\begin{array}{rcl} & \frac{2}{3} & \\ 8 & 2 & \frac{4}{3} \\ & 4 & 1 \\ & 3 & \frac{1}{4} \end{array}$$

E Andem prorsus demonstrationem valere in numeris jam ostendam, unde etiam veritas illius, ac soliditas magis stabilietur.

Dati sint tres numeri quicumque exem. gr. 8, 4, 3. Fiat ut 4. ad 8. ita 1. ad 2. & ut 4. ad 3. sic 1. ad $\frac{1}{4}$. Erunt igitur rationes 8 ad 4. &

2 ad 1. item rationes 4 ad 3. & 1 ad $\frac{1}{4}$. inter se æquales;

(a) Per 22. l. 5. eritque ex æquo (a) etiam ratio 8 ad 3 æqualis rationi 2 ad $\frac{1}{4}$.

Fiat deinde ut $\frac{1}{4}$ ad 1. ita 1 ad $\frac{4}{3}$: eruntque rationes 2 ad 1.

& 1 ad $\frac{4}{3}$ (hoc est rationes 8 ad 4. & 4 ad 3.) reductæ ad

duas rationes 2 ad 1 & $\frac{4}{3}$ ad 1. habentes commune conse-

(b) Patet ex
num. 2.

quens unitatem; ac proinde 2 & $\frac{4}{3}$ erunt (b) rationum 8 ad 4.

& 4 ad 3. denominatores. Multiplicentur jam per invicem

denominatores: 2 & $\frac{4}{3}$. hoc est fiat, ut 1 ad $\frac{4}{3}$. ita 2 ad $\frac{8}{3}$. Er-

runt $\frac{8}{3}$ productum ex 2 & $\frac{4}{3}$ denominatoribus rationum 8 ad 4.

& 4 ad 3. inter se multiplicatis. Ergo ratio hujus producti

ad 1. est ea, (c) quæ producitur ex multiplicatione rationum

8. ad 4. & 4. ad 3. Jam vero quia per const. ut 1. est ad $\frac{4}{3}$.

ita 2. est ad $\frac{8}{3}$. erit etiam inversum $\frac{8}{3}$. ad 2. ut $\frac{4}{3}$. ad 1. Sed

rursum per const. $\frac{4}{3}$. sunt ad 1. ut 1. ad $\frac{1}{4}$. Ergo $\frac{8}{3}$. sunt ad 2.

ut 1. ad $\frac{1}{4}$. Ergo permutando $\frac{8}{3}$. sunt ad 1. ut 2. ad $\frac{1}{4}$. Sed

jam ostendi rationem $\frac{8}{3}$. ad 1. esse eam quæ producitur ex

multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Ergo etiam

ratio 2. ad $\frac{1}{4}$. est ea. quæ producitur ex multiplicatione ratio-

num 8. ad 4. & 4. ad 3. Sed ostensum est supra rationem 2.

ad $\frac{1}{4}$. parem esse rationi 8. ad 3. Ergo etiam ratio 8.

ad 3. producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4.

ad 3. Igitur per num. XI. ratio. 8. ad 3. ex rationibus 8. ad 4.

& 4. ad 3. composita est. Quod erat demonstrandum.

8 Eodem modo demonstrabitur si plures dentur

4 numeri quam tres, rationem 8 ad 25 componi ex

3 rationibus 8 ad tria, (hoc jam est ex rationibus 8

25 ad 4. & 4. ad 3) & ex ratione 3. ad 25: & ratio-

73 nem 8 ad 73 componi ex rationibus 8 ad 25 (hoc

jam est ex rationibus 8 ad 4; 4 ad 3; 3 ad 25) &

ratione 25 ad 73. & sic in infinitum.

in
ve-

gr.

ad

4 &

des;

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

ad 1.

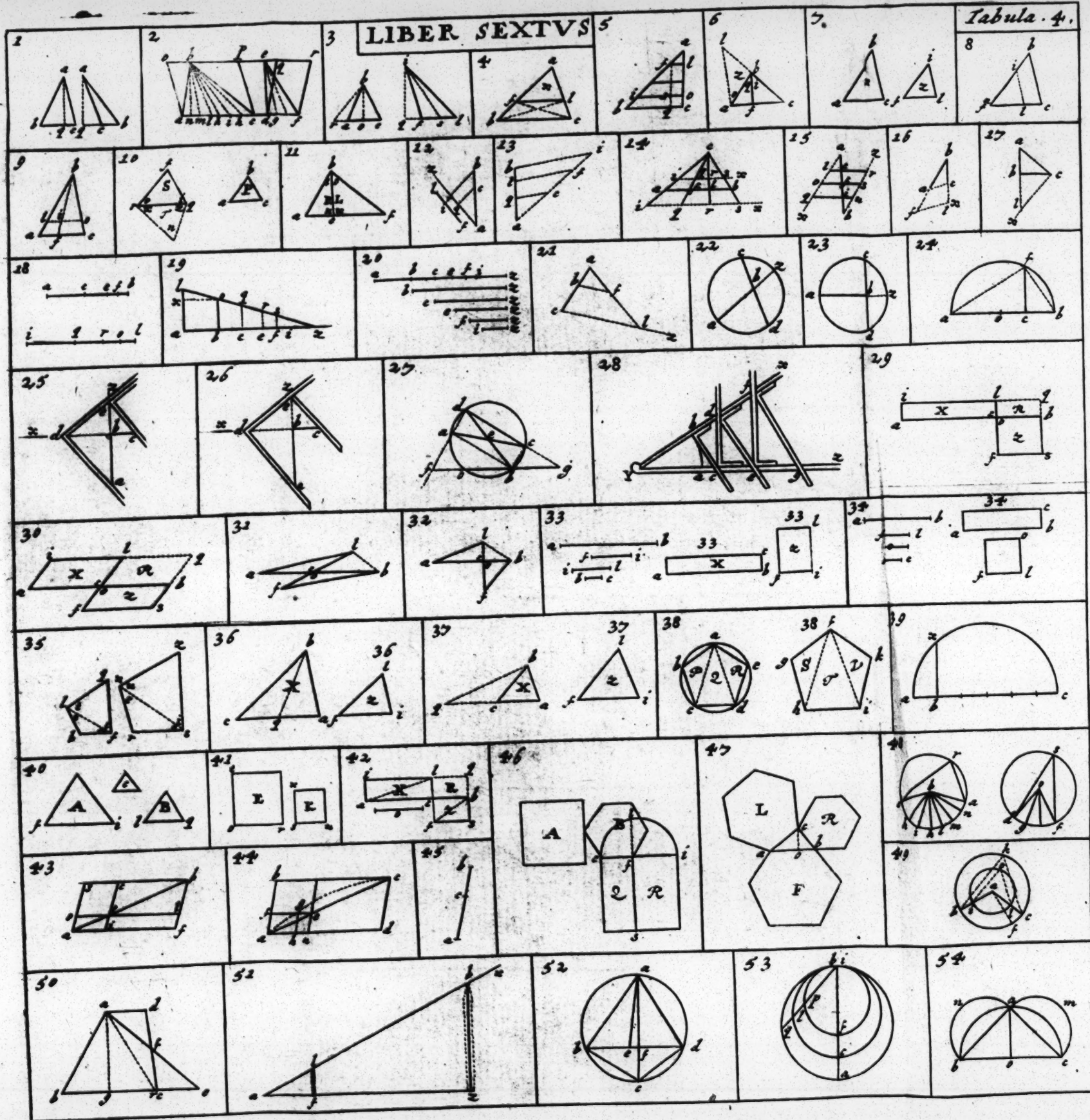
ad 1.

ad 1.

XIII.

LIBER SEXTVS

Tabula . 4 .



Si

S
erit
num
nib

T
pri
am
a
cor
ad
ter
m
u
ut
pot

XIII.

*Si dentur quotcunque rationes, A ad B, C ad D
E ad F: Exhibebitur ratio ex omnibus composita.*

SI fiat ut A ad B, ita quæpiam G ad H; & ut C ad D, ita H ad I; & ut E ad F, ita I ad K: ratio enim G ad K erit composita ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K, ut num. preced. demonstravimus, hoc est per constr. ex rationibus datis A ad B, C ad D, E ad F. Fig. 36.

XIV.

Ratio non est æqualis rationibus ex quibus componitur.

Inter duas quantitates G, K, alie quantitates interponantur, sive illæ sint continue proportionales sive non; ratio prima G ad ultimam K non est æqualis rationibus intermedis G ad H, H ad I, I ad K, licet ex iis sit composita. Nam ex iis componi idem est, quod produci ex earum multiplicatione mutua, ut ostensum est num. XI. Cum igitur ratio G ad K sit producta ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K inter se multiplicatis, ut ex demonstratione num. 12. patet, non possunt rationes G ad H, H ad I, I ad K simul sumptæ æquales esse rationi G ad K, nisi cum per accidens rationum additio & multiplicatio eandem efficiant rationem. De æque rationibus dictis habeatur una æqualis, erunt illæ sibi mutuo addendæ, ut traditur num. 5. & 6. ex qua additione proveniet ratio illis omnibus æqualis; quæ fore semper, ut dixi, erit diversa ab illa, quæ ex eandem rationum compositione, hoc est, multiplicatione exsurget.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER SEXTUS.

Proportionum doctrina libro quinto universim exposita in sexto figuris planis applicatur. Et sunt quæ hoc libro traduntur adeo scitu necessaria, ut sine illis arcana Geometriæ penetrare, fructusque suaves Mathematicos percipere nemo possit. Ad propositiones prope singulas oporteret encomium texere: tanta omnium utilitas est.

Incipit autem Liber hic Sextus egregiam illam de proportionum Geometrica doctrinam unperrime expositam usibus variis, planeque præstantissimis applicare: & A triangulis, figurarum simplicissimis exorsus, eorum latera & areæ, prout ad se invicem proportionis quadam respondent, investigat. Deinde lineas proportionales & figurarum augmenta aut decrementsa proportionalia definit: & quo eisdem modo in ratione data augemus, aut minuiamus, ostendit. Regulam etiam auream seu proportionalem, totius arithmetica palmariam aperit, & in rectangulo triangulo non tantum quadratum sed pentagonum, hexagonum, & universum polygonum quodcumque regulare a hypotenuse descriptum, aequari quadrato, pentagono, hexagono vel quibuscumque polygonis regularibus a duobus lateribus descriptis, demonstrat. Postremo facillima certissimaque tum linearum superficies, tum corpora mensurandi principia, in omnibus Mathematicarum scientiarum partibus utilissima proponit.

DEFINITIONES.

1. **S**imiles figuræ sunt, quæ & singulos angulos singulis æquales habent, & latera, quæ æqualibus angulis opponuntur, vel quæ inter æquales angulos existunt, vel quæ sunt circa æquales angulos (Eodem omnia recidunt) proportionalia.

Fig. 7. 16.

Ut triangula X, Z dicentur similia, si angulus A sit æqualis angulo F, & angulus B angulo I, & angulus C angulo L, atque insuper si AB sit ad FI, ut BC ad LI; & BC ad LI, ut CA ad LF; & CA ad LF, ut AB ad FI; Compara-

rande

rando semper latera æqualibus angulis opposita. Eodem modo aliarum figurarum rectilinearum omnium similitudo explicabitur.

2. Reciproce figuræ sunt, cum in utraque antecedentes & Fig. 29. consequentes rationum termini fuerint.

Ut in parallelogrammis X, Z,
si AC sit ad CB,
ut FC ad CL.

Antecedentia sunt AC & FC, quorum in utraque figura unum est; & consequentia sunt CB & CL, quorum similiter in quaque figura unum est: parallelogramma proinde X, Z, reciproca dicuntur. Idem de aliis figuris intellige.

3. Altitudo figuræ est perpendicularis a vertice ad basim deducta. Est Euclidi 4.

Ut trianguli ABC altitudo est perpendicularis AQ, a vertice cadens in basim BC, vel intra triangulum, vel extra in basim protractam. Basis autem & vertex assumuntur ad libitum. Fig. 1.

4. Similes arcus circulorum dicuntur, qui eandem habent ad totas suas circumferentias rationem.

Ut si ambo sint suæ circumferentiæ pars tertia, vel quarta, &c.

PROPOSITIO PRIMA.

Triangula (ABC, DEF) & parallelogramma Fig. 2.
(AOPC, DQRF) quæ eandem habent al-
titudinem, siue inter easdem existunt parallelas, eam
inter se proportionem habent, quam bases (AC,
DF.)

Ab hoc theoremate dependet totus sextus liber, imo quid-
quid uspiam de figuris siue planis, siue solidis per proportionem
demonstratum est. Demonstrat illam Euclides per multiplices,
quæ in primo statim aditu hujus libri tyrones perturbant. Ali-
am igitur demonstrationem dabimus facillimam ex theor. 5.
partis secundæ lib. 5., hunc in modum.

Sumatur baseos DF quævis pars aliquota, ex. gr. DG una
tertia, & ducatur recta GE, erit etiam triangulum DEG ter-
tia pars trianguli DEF, ut colligitur ex 38. l. 1. Quare recta
DG & triangulum DGE sunt consequentium * similes ali- * Per defin.
quotæ. Auferatur deinde DG ex basi AC quoties potest, puta 7 L 5
sexies, ducanturque rectæ HB, IB, KB, LB, MB, NB.
Quoniam CH, HI, &c. æquales sunt singulæ ipsi DG, etiam

(a) Per 38. *Sex triangula CBH, HBI, &c. triangulo DEG æqualia* (a) *erunt singula. Ergo quoties DG continetur in antecedente AC, toties triangulum DEG continetur in antecedente ABC. Eodem discursu ostendam quascunque consequentium (bascos DF & trianguli DEF) similes aliquotas in antecedentibus, (basi AC & triangulo ABC,) æquali numero contineri. Ergo per theor. 5. partis secundæ lib. 5. ut basis AC ad basim DF, ita triangulum ABC ad triangulum DEF. Quod erat demonstrandum.*

(b) Per 41. *Quoniam vero parallelogramma AP, DR sunt dupla* (b) *triangulorum ABC, DEF, etiam illa erunt inter se ut bases.*

Corollarium.

Fig. 3. **T**riangula (ABC, FIL) & parallelogramma, æquales bases (AC, FL) vel eandem habentia, eam inter se rationem habent quam altitudines (BO, IQ.)

Fiant enim QS, OR æquales æqualibus basibus FL, AC. Erunt igitur etiam QS, OR inter se æquales. Duc SI, RB. Si in triangulis OBR, QIS accipiantur BO, IQ tanquam bases, erunt OR, QS eorum altitudines: quæ cum sint æquales, erunt triangula OBR, QIS inter se, ut (c) bases BO, IQ. Sed quia ex const. OR par est AC, & QS par FL, triangula OBR, QIS æquantur (d) triangulis ABC, FIL. Ergo etiam triangula ABG, FIL sunt inter se ut BO ad QI.

Fig. 50. Corol. (2.) Hinc Trapezium ABCD, cujus latera AD & BC sunt parallela, in partes quoscunque æquales partiri discimus. Fiant enim CE æqualis AD. Ob angulos ad verticem * Per 15. l. 1. oppositos * æquales, AFD, EEC, & angulos alternos DAF, FEC, & ADF, ECF † æquales, & bases AD, CE per constructionem æquales, triangula ADF & FCE * æqualia sunt; & prout triangulum ABE Trapezio ABCD æquale. Divisa itaque basi BE in æquales quoscunque partes, puta tres BG, GR, RE, erit triangulum ABG, vel AGR, vel ARE, trapezii pars tertia, 2. E. I.

PROPOSITIO II.

Fig. 4. **S**i ad unum trianguli latus (BC) ducta fuerit (FL) parallela, hæc secabit proportionaliter latera, (hoc est AF erit ad FB, ut AL ad LC.)

Et si recta (FL) secuerit latera (BA, CA) proportionaliter, erit ad reliquum latus (BC) parallela.

Pars I.

Pars 1. Ducantur BL, CF. Quoniam FL ponitur parallela BC, erunt triangula FBL, LCF, eandem basim FL habentia, inter (a) se æqualia. Ergo triangulum X, ad u-(a) Per 37.1.1. trumque eandem (b) habet rationem, hoc est triangulum X (b) Per 7.1.5. est ad triang. FBL, ut triangul. idem X est ad triang. LCF. Sed triangulum X est ad triang. FBL, ut (c) AF ad FB: & (c) Per præ. triangulum X est ad triang. LCF, ut (d) AL ad LC. (d) Per eand. Ergo (e) etiam AF est ad FB ut AL ad LC. Quod erat (e) Per 11.1.5. demonstrandum.

Pars 2. Ut AF est ad FB, ita triangulum X (f) est ad (f) Per præ. triangulum FBL; & ut AL est ad LC, ita (g) triangulum (g) Per eand. X est ad triang. LCF. Sed jam ponitur AF ad FB, ut AL est ad LC. Ergo triang. X est (h) ad triang. FBL, ut idem (h) Per 11.1.5. X ad LCF. Ergo (i) triangula FBL, LCF, eandem ha-(i) Per 9.1.5. bentia basim, æquantur. Ergo FL, BC (k) sunt paralle-(k) Per 39.1.2. lz. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

SI ad unum trianguli latus (BC) ductæ fuerint plures pa-
rallæ (IO, FL,) erunt omnia laterum segmenta, pro-
portionalia. Fig. 5.

Ducatur FQ parallela AC. Rectæ FS, SQ æquantur
(l) LO, OC. Sed BI est ad IF, ut (m) QS ad SF. Ex-
go etiam BI est ad IF, ut CO ad OL. (l) Per 34.1.1.
(m) Per 2.1.6.

PROPOSITIO III.

SI recta (BF) angulum trianguli bisariam se-
cans, etiam secet basim (AC,) habebunt ba-
sis segmenta (AF, FC) eandem proportionem quam
religua latera (AB, CB,) Fig. 6.

Et si baseos partes (AF, FC) eandem rationem
habuerint quam reliqua latera (AB, CB,) recta
(BF) basim secans, angulum oppositum (ABC)
bisecabit.

Pars 1. Produc CB, donec BL sit par BA, & junge AL.
Quoniam in triangulo Z, latera LB, AB æquantur, anguli
(a) quoque L & O æquales erunt. Quia igitur externus ABC (a) Per 5.1.2.
duobus (b) internis L, O æqualis est; angulus I, qui per hyp. (b) Per 32.
ipsius ABC dimidius est, æquabitur angulo L. Ergo AL, l. 1.
FB sunt (c) parallele. Ergo in triangulo ACL, AF est ad (c) Per 29.
FC, AL.

(d) *Per 2.* *h. 6.* FC, (d) ut LB (hoc est AB) ad BC. Quod erat demonstrandum.

Pars 2. Produc iterum CB donec LB sit par AB. Quoniam ponitur ut AF est ad FC, ita AB (hoc est LB) esse ad BC, erunt AL, FB (e) parallelæ. Ergo externus I, est par (f) *per 27. l. 1.* (f) interno L, & alternus Q æqualis alterno O. Sed quia (g) *per 5. l. 1.* LB, AB æquales sunt, anguli (g) L & O sunt æquales. Ergo etiam I & Q æquales sunt. Bifectus ergo est ABC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

Triangula sibi mutuo equiangula, sunt similia; hoc est, (a) etiam latera equalibus angulis opposita, habent proportionalia.

Fig. 7. IN triangulis X, Z, angulus A sit par angulo F, & angulus C angulo L, & angulus B angulo I, Dico AB esse ad FL, ut AC ad FI; & AC esse ad FL, ut CB ad LI; & CB esse ad LI, ut BA ad FI.

Fig. 7. & 8. Dem. Si angulus F ponatur supra sibi æqualem A, latera FI, FL, cadent supra latera AB, AC. Et quia (b) *Fig. 8.* angulus externus AIL, per hypoth. par est interno B, erunt (c) IL, BC parallelæ: Ergo (d) BI est ad IA, ut CL ad LA. Ergo (e) componendo BA est ad IF ut CA ad LF. Quod si angulus L imponatur Angulo C, eodem modo ostendam AC esse ad FL, ut BC ad IL: & si angulus I, imponatur angulo B, ostendetur pari modo, BC esse ad IL, ut AB ad FI. Liqueat ergo propositum.

Corollaria.

Fig. 3. 1. SI in triangulo ducatur uni lateri (BC) parallela (LI,) erit triangulum LFI simile toti CFB; ac proinde CF est ad LF, ut BC ad LI.

(a) *per 27. l. 1.* Nam quia LI, BC parallelæ sunt, erunt (a) externi FIL, FLI, pares internis B & C: F vero utrique triangulo est communis. Ergo sunt æquiangula. Ergo latera CF, LF (a) *per prae.* opposita æqualibus angulis B & FIL, sunt (a) proportionalia lateribus BC, LI, quæ opponuntur communi angulo F.

Fig. 9. 2. Si in triangulo parallelas AC, LO secet recta BF, ab angulo opposito B ducta, secabit eas proportionaliter.

Nam per coroll. 1. AF est ad LI, ut FB ad IB; & FC (b) *per 11. l. 5.* quoque est ad IO, ut FB ad IB. Ergo AF est ad LI ut (b) (c) *per 16. l. 5.* FC ad IO. Igitur permutando AF est ad FC (c) ut LI ad IO.

[3. E]

[3. E Corollario primo, Turris aut puncti cuiusvis elevati alti- Fig. 51.
tudinem per solam baculi umbram definire discimus. Baculum
FL solo perpendiculariter desige eo loco ubi radius solis XBA um-
bram Turris BZ definiens, etiam transeat per L. Erit in triangulo
AZB linea FL altitudini turris ZB parallela. Unde ut AF
distantia baculi ab umbra mucrone, ad FL baculi longitudi-
nem; ita AZ distantia turris ab umbra mucrone, ad ZB al-
titudinem Turris. Et Quia tria prima mensurando facile ha-
beantur, habebitur & quartum, Altitudo quasita. Q.E.I.

4. Ab hac etiam propositione longe utilissima, celebre illud Ptole- Fig. 52.
mai theorema deducemus, scilicet in omni quadrilatero circulo in-
scripto, Rectangulum ex diagonis AC in BD, aequale esse duo-
bus rectangulis ex lateribus oppositis, AB in CD & AD in
BC. Fiat enim angulus BAE aequalis angulo CAD. Ob an-
gulos BAE, CAD aequales per constructionem; & angulos* ABE* per 21.1.3.
ACD eidem arcui AD insistentes, aequales; Erunt triangula
BAE, CAD similia. Et AC:CD::AB:BE; & proinde
† rectangulum extremorum ACXBE, aequale rectangulo medio- † per 16.1.6.
rum CDXAB. Pariter ob angulum EAD angulo BAC a-
qualem per constructionem; & angulos ADE, ACB, eidem
arcui AB insistentes, aequales; erunt triangula ADE, ACB
similia: & AD:DE::AC:CB. & proinde rectangulum
extremorum ADXC, aequale rectangulo mediorum DEXAC.
Sed rectangula ACXBE & ACXCDE* aequantur rectangulo* per 1.1.2.
ACXBD. Ergo rectangula ABXDC & ADXCBC sub
lateribus oppositis, aequantur rectangulo ACXBD sub diago-
nis. Q.E.D.]

PROPOSITIO V.

SI duo triangula habuerint omnia latera sibi mu- Fig. 10.
tuo proportionalia, etiam sibi mutuo aequiangula
erunt.

Hoc est, si AB sit ad RF, ut AC ad RQ; & ut AC ad
RQ, sic CB ad QF; & ut CB ad QF, sic AB ad RF: dico
angulos antecedentibus oppositos æquari angulis qui oppo-
nuntur consequentibus. Nimirum C ipsi I; B ipsi F; A
ipsi O.

Ang.	Antec.	Conseq.	Ang.
C.	AB	RF	I
B	AC	RQ	F
A	CB	QF	O

Angulis A & C fac æquales X & Z: & latera cocant in N.
Etiam igitur (d) B & N æquales erunt. Quia ergo triangula (d) Per corol.
P, T sunt æquiangula, erit (e) AB ad RN, ut AC ad RQ. (e) per prop.
Sed

- Sed ex hyp. etiam est AB ad RF , sicut AC ad RQ . Ergo
 (a) Per 9. L. AB est ad RF , ut eadem AB ad RN . Ergo RN, RF (a)
 sequantur. Pari modo ostendam equari QN & QF . Trian-
 gula igitur T, S , sibi mutuo sunt æquilatera. Igitur anguli
 (b) Per 8. L. I, E, O sequantur (b) angulis Z, N, X , (hoc est per const.) an-
 gulis C, B, A . Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

Fig. 10.

SI duo triangula (P, S) habeant unum angulum
 (A) æqualem uni (O) & latera (AB, AC ,
 RF, RQ) quæ æquales angulos continent, propor-
 tionalia; triangula erunt similia.

- Angulis A, C sunt æquales X, Z , & latera cecant in N .
 (c) Per coroll. Igitur anguli quoque (c) B & N æquales erunt. Ostendam,
 9. p. 32. l. 1. ut in præcedenti, æquales esse RF, RN . Est vero RQ uni-
 que triangulis S, T communis. Anguli quoque O & X æqui-
 les sunt, quia sequantur ambo eidem A ; X per const. O per
 (d) Per 4. L. 1. hyp. Ergo etiam I & F (d) sequantur ipsis Z & N . Trian-
 gulum igitur S æquilaterum est triangulo T ; hoc est per
 (e) Per 4. L. 6. const. triangulo P . Ergo S, P (e) similia sunt. Quod erat
 demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

VIX ullius est usus.

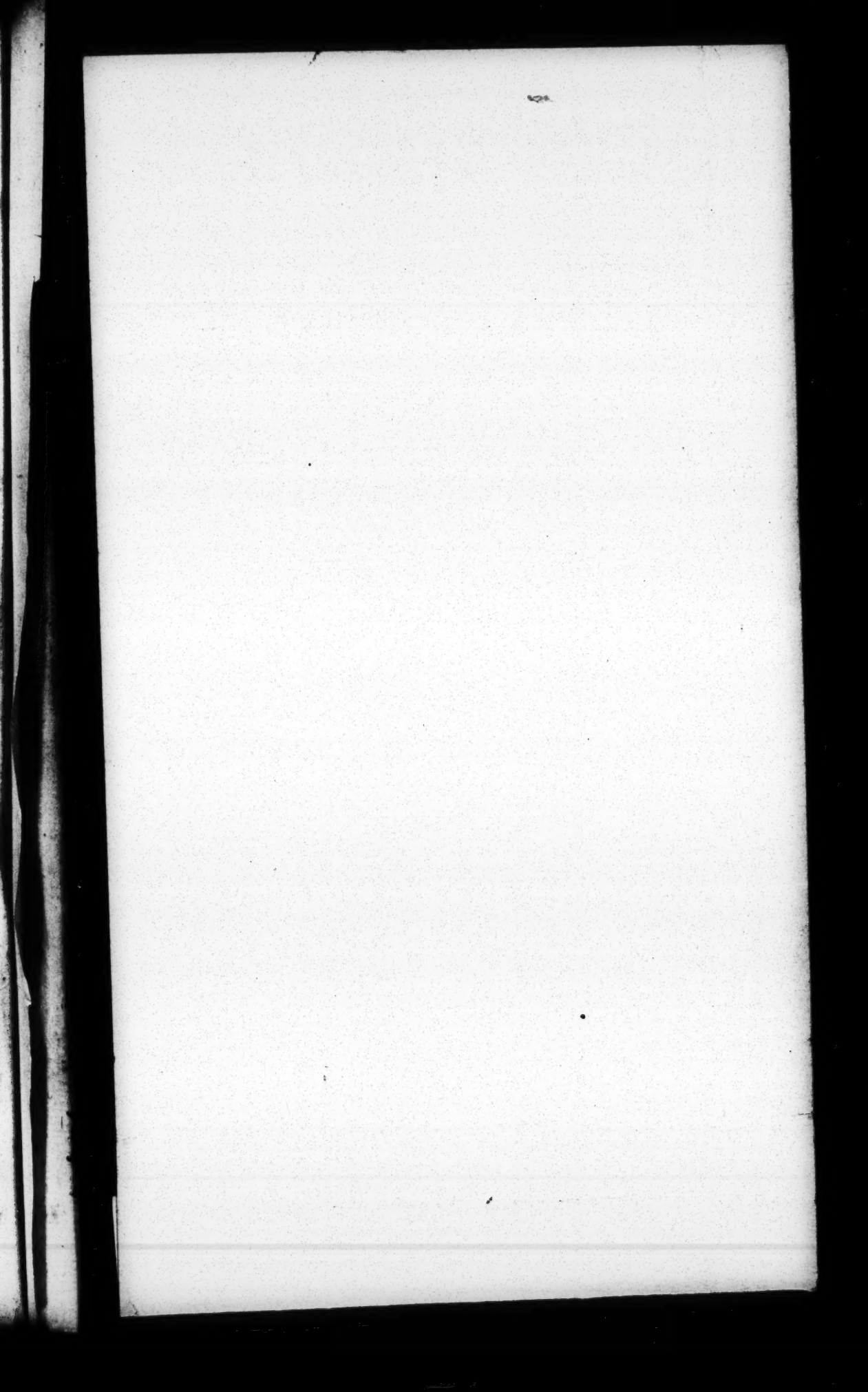
PROPOSITIO VIII.

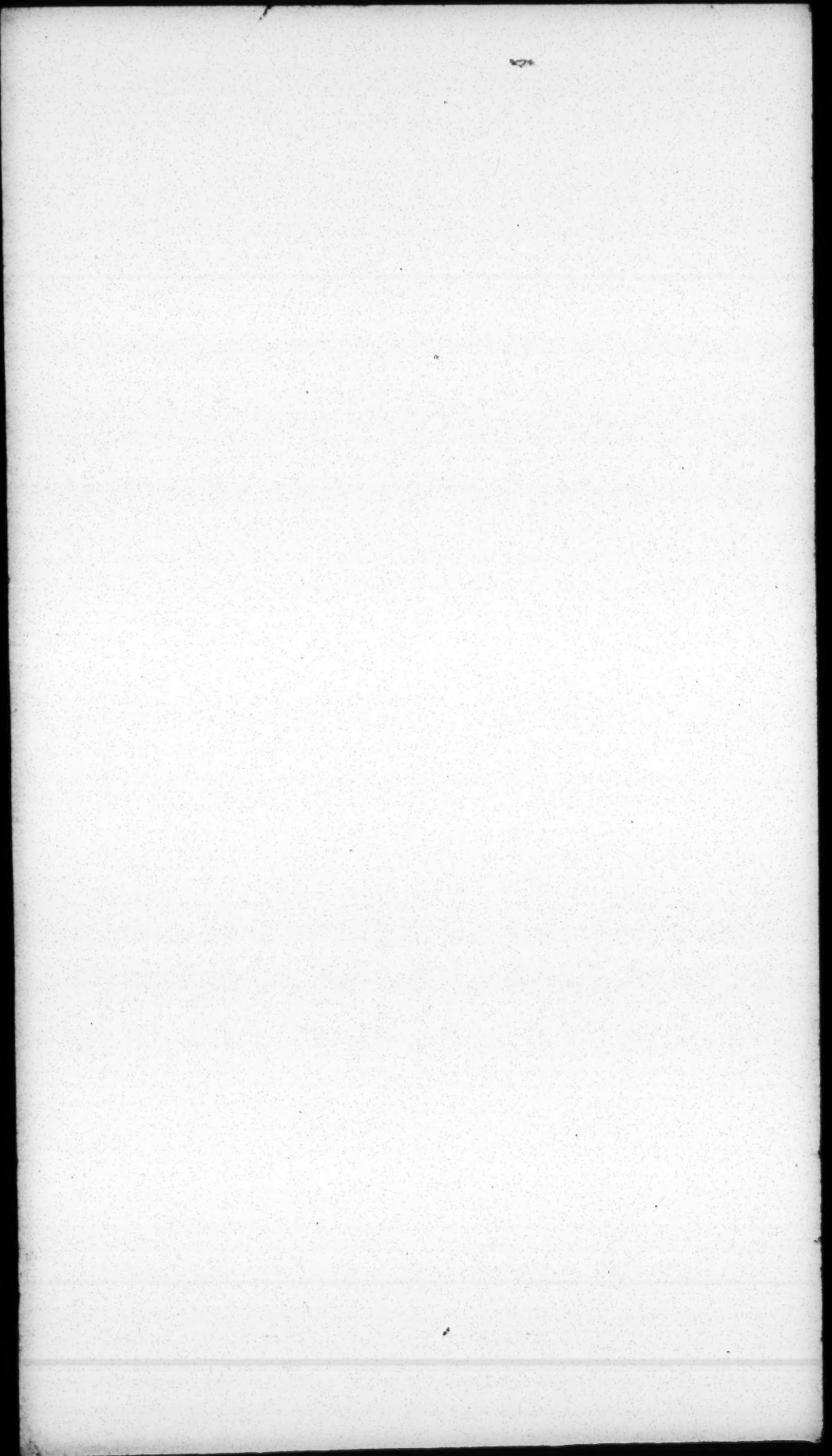
Fig. 11.

IN triangulo rectangulo, perpendicularis (BC) ab
 angulo recto in basim ducta, secat triangulum in
 partes totas, & inter se similes.

- In triangulis ABF & L , angulus F communis est; an-
 guli vero ABF , & X per hypothesin sunt recti, adeoque æ-
 (f) Per coroll. quales. Ergo reliqui A & O etiam (f) æquales erunt. Ergo
 9. p. 32. l. 1. (g) triangula ABF & L similia sunt. Eodem modo similia
 (g) Per 4. L. 6. ostendam esse triangula ABF & R , angulumque I parem
 angulo F . Ex quo jam patet etiam R & L similia esse, cum
 æquales sint anguli I & F ; O & A ; V & X . Quod erat de-
 monstrandum.

Coroll.





Corollaria.

Primo BC est media proportionalis inter AC, CF.
Cum enim sint in triangulis R & L

æqu. ang. I. F.		æqu. ang. A. O
lat. opp. AC. CB		lat. opp. CB. CF.

Patet (a) AC esse ad CB, ut CB est ad CF.

(a) Per 4. 16.

2. BF est media proportionalis inter AF & CF. Item
AB est media inter FA, & CA.

Nam in triangulis ABF & L, sunt

æqu. ang. ABF. X.		æqu. ang. A. O.
lat. opp. AF. BF.		lat. opp. BF. CF.

Ergo AF est (b) ad BF, ut BF ad CF. Similiter quia in (b) Peronati
triangulis ABF & R, sunt

æqu. ang. ABF. V		æqu. ang. F. I.
lat. opp. AF. AB		lat. opp. AB. AC.

Erit rursus AF ad AB, ut AB ad AC.

3. Hinc lineam inaccessam, cujus terminus alter est accessibilis, metiri discimus. Sit linea inaccessa CF. Erigatur a Fig. 11.
puncto C linea perpendicularis CB: & ad quodvis illius perpen-
dicularis punctum B applicetur Norma, aut angulus quovis re-
ctus ABF: ita ut per latus BF respiciendo punctum F, & per
latus BA punctum A observetur. Mensuretur linea AC acces-
sibilis, & ex analogia sequenti innotescet inaccessa CF. AC:CB::
CB:CF. Quadratum itaque lineæ CB dividatur per lineam
AC, & Quotiens (c) dabit lineam quæsitam CF. Q. E. I. (c) Per Cor. 3
p. 17. 46.

PROPOSITIO. IX.

Datam rectam (AB) dividere secundum da- Fig. 12.
tam proportionem (FI ad TL.)

Ducatur infinita AZ. Ex qua sume AQ, QR æquales
FI, IL. Ex R duc RB. Huic ex Q duc QC paral-
lam. Dico factum.

Patet ex p. 2. l. 6.

PROPOSITIO X.

Datam rectam (AB) similiter secare ut altera Fig. 13.
data (AI) fuerit secta (in F, C.)

Ex .

Extremitates sectæ & infectæ jungat recta IB. Huic ex punctis F, C duc parallelas, rectæ secandæ AB occurrentes in L & Q. Dico factum.

Patet ex corollario p. 2. l. 6.

Fig. 53.

[Aut etiam si linea secta IA sit major secanda B, tres circuli se mutuo tangentes diametris IF, IC, IA descripti; & appetur subtensa B a puncto I ad circumferentiam circuli maximi: circuli duo minores in punctis L, P lineam B secant.

* Coroll. 4. bunt in * ratione sectionum diametri IA. Si linea IA secta sit in p. 31. l. 3. partes quatuor, circuli quatuor adhibendi sunt; si in quinque, circuli etiam quinque; & ita in infinitum.]

Scholium.

Fig. 13.

EX hac propositione discemus rectam datam in quotvis æquales partes secare. Cum recta secanda AB faciat quemvis angulum recta quæpiam infinita; ex qua circino cape tot æquales partes AC, CF, FI, in quot secare placuerit AB. Duc rectam IB, eique parallelas FL, CQ. Dico factum.

Fig. 14.

Aliter idem & facilius efficiemus cum Maurolyco hunc in modum: Sit AB trisecanda. Duc ad AB parallelam IX infinitam, supra vel infra. Ex IX, si est infra AB; cape circino tres æquales partes IQ, QR, RS, quæ simul majores sint quam AB, minores vero si IX est supra. Per I & A, item per S & B duc rectas; quæ concurrant in C. Ex C ad Q & R ductæ rectæ datam AB trisecabunt. Demonstratio patet ex coroll. 2. prop. 4.

Fig. 15.

Rursum cum Maurolyco aliter id ipsum ita obtinebimus. Sit quatrifecanda AB. Duc infinitam AX, eique parallelam BZ etiam infinitam. Ex his cape circino partes æquales AL, LO, OQ, & BV, VS, SR, in singulis nempe una pauciores quam desiderantur in AB: tum rectæ ducantur LR, OS, QV. Hæ quatrifecabunt datam AB.

Nam quia per constr. LO, RS parallelas & æquales, jungunt LR & OS, etiam hæ erunt (a) parallelæ. Pari modo OS, QV sunt parallelæ. Ergo cum AQ sit secta in tres æquales partes, etiam erit AI secta (b) in tres æquales. Si militer erit BC secta in tres æquales. Tota igitur AB secta est in quatuor æquales.

Hæ duæ praxes sunt faciliores Euclideæ, quia pauciores ducendæ sunt parallelæ.

PROPOSITIO XI.

Datis duabus rectis (AB, BC) tertiam proportionalem invenire. *Fig. 16.*

Duc rectam AC . Ex BA producta accipe AF parem BC . Per F ad AC duc parallelam FX infinitam, cui in L occurrat producta BC . Dico AB est ad BC , ut BC ad CL .

Nam AB est ad AF , (a) ut BC ad CL . Sed AF est (a) Per 2. l. 6. (b) par BC . Ergo AB est ad BC , ut BC ad CL ; adeo (b) per conf. que CL est tertia proportionalis quæ petebatur.

Aliter.

Statuatur AB, BC ad angulum rectum. Junge AC . Ex *Fig. 17.* C duc CX perpendicularem ad AC infinitam, cui in L occurrat AB producta. Dico AB est ad BC , ut BC ad BL . Patet ex coroll. 1. prop. 8.

Scholium.

Poterit vero proportio data non solum per tres terminos, sed etiam per infinitos continuari, & tota infinitorum proportionalium terminorum summa exhiberi. Pulcherrime hanc rem, totumque adeo Geometricæ progressionis negotium Gregorius a S. Vincentio persecutus est toto libro 2. sui operis. Nos in gratiam studiosorum succinctam rei propositæ constructionem, ac demonstrationem hic exhibebimus.

Lemma 1.

Si ratio minoris inæqualitatis LO ad LR semper continu- *Fig. 18.*
etur, venietur ad quantitatem quavis data majorem. *secunda.*

Sit LO ad LR ut LR ad LQ , &c. Igitur (a) invertendo, (a) Per schol. ut QL ad RL , sic RL ad OL . Ergo divid. (b) QR ad RL , ut RO ad OL ; & permut. (c) QR ad RO , ut RL ad OL . Sed RL est major quam OL . Ergo etiam QR (c) Per 16. major quam RO . Pari modo ostendam IQ esse majorem quam QR & sic deinceps. Quoniam igitur continuando rationem LO ad LR , ad primam LO semper accedunt partes OR, RQ, QI , &c. perpetuo crescentes, patet veniri ad quantitatem quavis data majorem. Quod erat demonstrandum.

Lemma 2.

Si ratio quæcunque majoris inæqualitatis AB ad CB semper continetur, ad quantitatem venietur quavis data minore. *Fig. 18. altera.*
Data

- (a) Per 9. 1.6. Data sit LO quantumvis parva. Fiat (a) ut BC ad BA,
 (b) Per lem. 1. sic LO ad LR. Poterit (b) ratio LO ad LR toties con-
 tinuari, ut aliquis terminus habeatur, puta LI major quam
 AB. Quoties vero continuata jam est ratio LO ad LR, per
 totidem terminos CB, EB, FB continuetur ratio AB ad CB.
 Erit FB minor quam OL.
 Nam ex const. patet IL, QL, RL, OL, esse propor-
 (c) Per 22. 1.5 tionalis ipsis AB, CB, EB, FB. Igitur ex æquo, ut (c) IL ad
 (d) Per 16. OL, sic AB ad FB, & permutando (d) ut IL ad AB, sic OL
 L. 3. ad FB. Sed IL est major (e) quam AB. Ergo etiam data
 (e) Per const. OL est major quam FB. Quod erat demonstrandum.

Problema.

Fig. 19.

Data sit ratio majoris inequalitatis AB ad BC. Opor-
 teat hanc per infinitos terminos continuare, & omnium
 summam exhibere.

Erigantur perpendiculares AL, BO, æquales datis AB, BC,
 & per LO ducatur recta concurrentem cum ABC producta, in
 Z. Dico 1. Si ex C erigas perpendicularem CQ; erit CQ
 tertia proportionalis. QQ transfer in CE, & ex E erige ER,
 erit hæc quarta. ER transfer in EF, & erige FS; erit hæc
 quinta: atque ita ratio AB ad BC, hoc est AL ad BO, per
 terminos AL, BO, CQ, ER, FS, &c. five AB, BC, CE,
 EF, FI, &c. in infinitum continuabitur, quia quilibet termi-
 nus (ut FS) poterit auferri ex residuo FZ; cum enim LA

(a) Patet ex (hoc est AB) sit minor quam AZ, etiam FS erit (a) mi-
 coroll. 1. p. 4. nor quam FZ.
 L. 6.

Dico 2. AZ est æqualis toti summe infinitarum pro-
 portionalium.

(b) Per 16. 1.5 1. Pars. AZ est ad BZ, ut (b) AL ad BO; hoc est, ut AB
 coroll. ad BC: Igitur permutando, (c) AB est ad AZ, ut BC ad
 (c) Per 16. 1.5 BZ. Ergo AZ est ad BZ, (d) ut BZ ad CZ, [Vel sic:
 (d) Per coroll. 1. p. 18. L. 5. (vide pag. 92.) Posito, ut supra, $AZ:BZ::AB:BC$; erit
 permutando, $AZ:AB::BZ:BC$. Et divid. $AZ-AB:$
 $AB::BZ-BC::BC$; hoc est, $BZ:AB::CZ:BC$.
 Ergo invertendo, $AB:BZ::BC:CZ$. Et compon. $AB+$
 $BZ:BZ::BC+CZ:CZ$; hoc est, $AZ:BZ::BZ:$
 CZ .] Sed ut AZ est ad BZ, sic LA est ad OB; & ut BZ
 ad CZ, ita OB ad QC. Ergo etiam LA est ad OB, ut
 OB ad QC. Eodem modo ostendam OB esse ad QC, ut
 QC ad RE, & sic deinceps in infinitum.

2. Pars. Tota summa infinitorum terminorum, neque mi-
 nor est quam AZ, neque major; Ergo æqualis. Non est ma-
 jor,

jor, quia, cum jam ostenderim supra, QC esse minorem quam CZ, & RE quam EZ, & SF quam FZ, & sic deinceps sine termino, poterunt omnes termini QC, RE, SF &c. sine fine constitui juxta invicem in recta AZ, sic ut nunquam punctum Z attingatur. Non erit etiam minor quam AZ: quia jam ostendi supra AZ, BZ, CZ esse continue proportionales & eodem modo idem ostenditur de reliquis EZ, FZ, &c. Cum igitur transferendo proportionales QC, ER, FS, &c. in CE, EF, FI, residua EZ, FZ, IZ &c. semper sint continue proportionalia, ut jam ostendimus; venietur tandem ad residuum (a) dato minus; ac proinde summa proportionalium superabit quantitatem omnem quæ minor sit quam AZ: unde ipsa non potest esse minor quam AZ. Quoniam igitur nec major est, nec minor quam AZ, eidem æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

Theorema.

Primorum terminorum differentia, primus terminus, & tota infinitarum proportionalium summa, sunt continue proportionales.

In superiori figura ducatur OX parallela AZ. Igitur LX Fig. 19. erit differentia primi termini AL, seu AB, & secundi BO, seu BC. Quoniam XO est parallela ad AZ; erit LX ad XO, ut (b) LA ad AZ. Sed XO est AB, & LA etiam (b) Per coroll. est AB. Ergo LX differentia, est ad AB primum terminum, ut AB primus terminus ad AZ totam summam. Quod erat demonstrandum.

Idem universaliter & brevissime demonstrabitur in omni Fig. 20. genere quantitatis hunc in modum. Sint continue proportionales quæcunque (etiam numeri) AZ, BZ, CZ &c. quæ transferantur omnes in primam AZ. Erunt igitur AB, BC, CE, EF &c. proportionalium differentia, quæ una cum postrema quantitate IZ, æquantur primæ AZ. Quia vero, si proportionales in infinitum continuentur, postrema quantitas per lem. 2. evanescit, patet infinitarum proportionalium differentias æquari primæ AZ. Deinde, quia est AZ ad BZ, ut BZ ad CZ, & sic deinceps; erit dividendo AB ad BZ, ut BC ad CZ, & (c) convertendo ut AB prima differentia (c) Per coroll. ad AZ primam quantitatem, ita BC secunda differentia ad BZ quantitatem secundam, & sic deinceps. Ergo ut AB prima differentia ad AZ primam quantitatem, (d) ita omnes differentia (d) Per 12. nes differentia (hoc est, ut jam ostendi, prima quantitas AZ,) ad omnes quantitates, hoc est, ad totam summam infinitarum quantitatum. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Fig. 21.

Datis tribus rectis (AB, BC, AF) quartam proportionalem invenire.

Disponantur datæ rectæ, ut figura monstrat, & duc rectam BF , cui parallela fiat CZ infinita: Ipsi CZ occurrat AF producta in L .

Dico AB est ad BC , ut AF ad FL , ut patet ex p. 2. hujus. Ergo FL est quarta proportionalis quaesita.

Scholium.

Pulchre Bettinus noster in suo *Ærario Mathematicæ philosophiæ*. Ex 35. l. 3. & 14. hujus, quæ ab hac non dependet, datis tribus quartam, & datis duabus tertiam proportionalem exhibet, hunc in modum.

Fig. 22.

Si tres dentur rectæ; secunda CB & tertia BD ponantur in directum, quas prima BA tangat in B sub quovis angulo:

(a) *Per s. 14.* Per puncta C, A, D describe (a) circulum, cui AB prima occurrat in Z . BZ est quarta proportionalis.

(b) *per 35. l. 3.* Cum enim rectangula ABZ, CBD (b) æqualia sint, erit AB ad BC , ut BD ad BZ per 14. hujus, quæ ab hac, ut dixi, non dependet.

Fig. 23.

Si dentur duæ rectæ AB, BC ; secundæ BC opponatur in directum BD æqualis BC . Dein ipsam CB in B tangat prima AB sub quovis angulo. Tum reliqua ut supra. Erit BZ tertia proportionalis quaesita.

Demonstratio similis est, cum enim rectangula ABZ, CBD sint æqualia, erit AB ad BC ut BD (hoc est, ut BC) ad BZ .

PROPOSITIO XIII.

Fig. 24.

Datis duabus rectis (AC, CB) mediam proportionalem invenire.

Tota composita AB bifecetur in O , & centro O describatur circulus per A & B : ex C erige perpendicularem CF , currentem peripheriæ in F .

Dico AC est ad CF , ut CF ad CB .

(c) *per 31.*

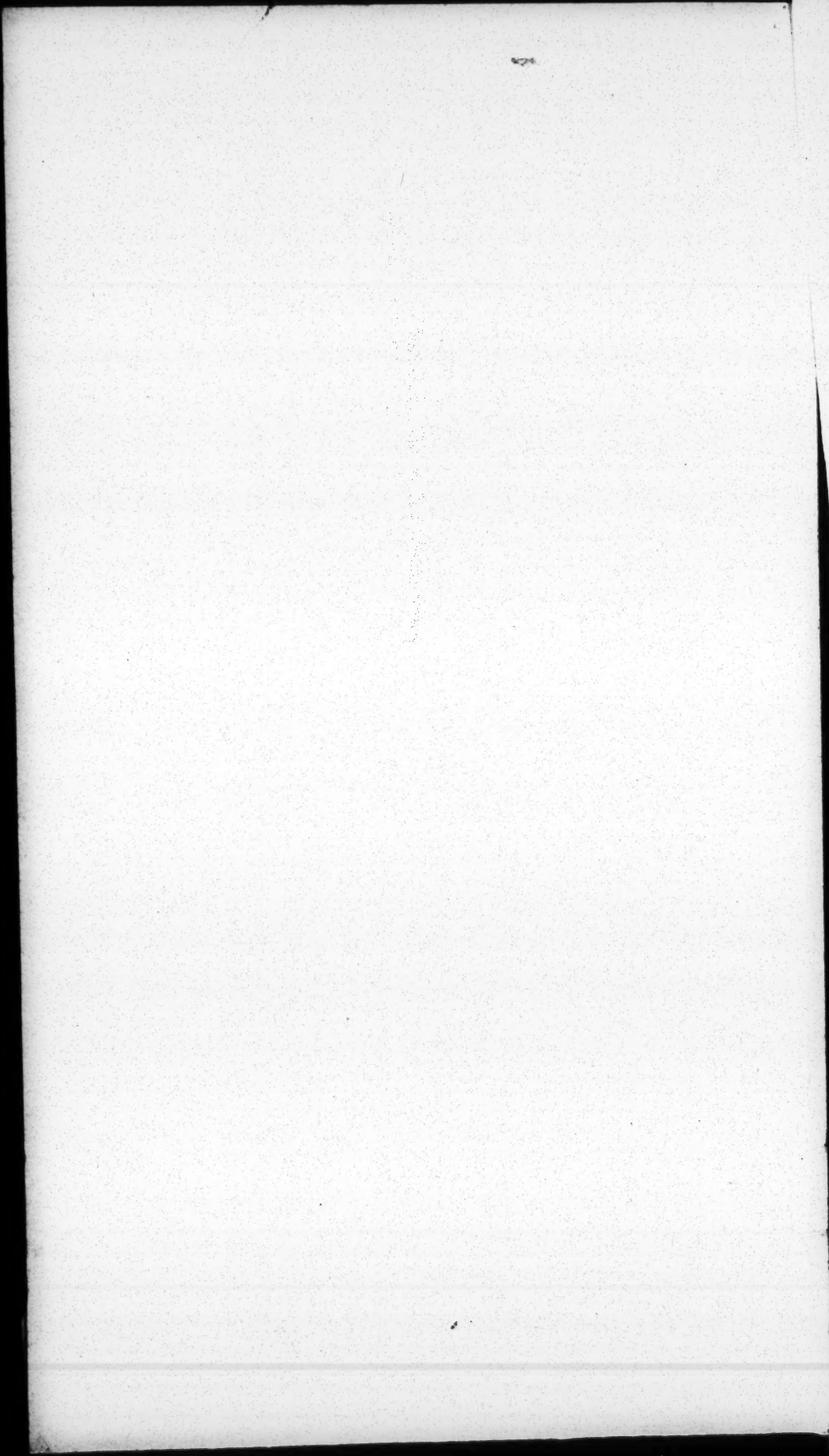
l. 3.

Ducantur enim AF, BF . Triangulum (c) AFB rectangulum est, & a recto angulo ducta est perpendicularis FC in

(d) *per corol. sim.* Ergo AC est ad CF , ut (d) CF ad CB .

l. p. 8. l. 6.

Corol.



P

I
n
tr
A
ti
to
co
ru
fin

C
in
G
an
B
de
ale
for
B
ad

rel
per
ad
H

D

ol-

Corollarium.

Hinc patet si ex quovis peripheriæ puncto (F) ducta sit ad diametrum perpendicularis (FC,) eam esse mediam proportionalem inter diametri segmenta (AC, CB.)

Schollum.

HIC locus omnino exigit, ut de duabus mediis proportionabilibus inter duas datas inveniendis etiam breviter dicamus aliquid. In hujus problematis solutionem, Platonis hortatu, omnes Græciæ Geometriæ summo studio incubuerunt. Ab Eutocio in comment. in Archim. varii recensentur subtilissimi modi, Platonis, Architzæ Tarentini, Menæchmi, Eratosthenis, Philonis Byzantii, Heronis, Apollonii Pergæi, Nicomedis, Dioclis, Spori, Pappi: quibus alios deinde addiderunt Vernerius, P. Gregorius a S. Vincentio, Renatus Cartesius. Ex omnibus visum est tres adferre reliquis faciliores.

Modus Platonis.

Opor-teat inter datas AB, BC, duas medias invenire. Ponantur AB, BC ad rectum angulum & producantur infinite versus X & Z. Accipiantur deinde duæ normæ (ita Claudius Richardus noster; Plato enim unica norma utitur, sed * cujus lateri DE inserta sit regula mobilis per DE) & unius normæ angulus D applicetur rectæ BX, ea lege ut & latus unum transeat per A; & ad punctum E, in quo latus alterum secabit rectam BZ, applicata norma secunda, transeat per C. Dico BD, BE duas esse medias inter datas AB, BC; hoc est ut AB est ad BD, sic esse BD ad BE, & BE ad BC.

Fig. 27.

* Vide Fig. 26.

Demonstratio patet ex coroll. 1. p. 8. l. 6. Nam ADE rectangulum triangulum est, & ab angulo recto in basim perpendicularis cadit DB. Ergo per dictum coroll. ut AB ad BD, sic BD ad BE: Et ob eandem causam, ut BD ad BE, sic BE ad BC. Inter datas igitur AB, BC repertæ sunt duæ modis BD, BE. Quod erat faciendum. Hic modus inter omnes intellectu facillimus est.

Modus Philonis Byzantii.

Duæ datæ AB, BC jungantur ad rectum angulum: tum perficiatur rectangulum ABCD & producantur DA,

K 2

DC

DC infinite, ducanturque diametri BC, AC, se secantes in E. Centro E per B ducatur circulus, qui, quod angulus ABC rectus sit, transibit (a) per A & C. Tum regula sic applicetur ad punctum B, ut interceptæ BG, OF, sint æquales. Dico AF, GC esse duas medias inter datas AB, BC; hoc est ut AB est ad AF, sic AF esse ad GC, & GC ad CB.

(b) Per constr. Demon. Quia GB, OF, (b) æquantur, etiam OG, BF æquales erunt. Ergo æqualia sunt rectangula OGB, BFO, hoc est rectangula (c) DGC, DFA. Ergo est ut GD, ad DF, (d) sic reciproce AF ad GC. Sed GD est ad DF, (e) ut BA ad AF. Ergo ut BA est ad AF, sic AF est ad GC. Rursum quia jam ostendi AF esse ad GC, ut BA est ad AF; est vero BA ad AF, ut GD ad DF, hoc est, ut GC ad CB; erit quoque AF ad GC, ut GC est ad CB. Omnes igitur quatuor BA, AF, GC, CB, sunt continue proportionales; ac proinde inter datas AB, BC inventæ sunt duæ medix. Quod erat faciendum.

Hi duo modi quamvis sint ingeniosi & faciles; tamen, quia debita normæ & regulæ applicatio non nisi tentando fit, Geometrici non sunt.

Modus Cartesii.

Fig. 28.

Paretur instrumentum huiusmodi. Duæ regulæ aperiri possint & claudi circa Y. His insertæ sint plures normæ inter se connexæ in B, C, D, E, F, G, ea lege ut dum regulæ YX, YZ aperiuntur, norma BC impellat normam CD in regula YZ, & norma CD impellat normam DE in regula YX, & DE impellat EF, & EF impellat FG, & sic deinceps. Dum vero regulæ YX & YZ clauduntur, omnia puncta B, C, D, E, F, G, incidant in unum idemque punctum A. Hoc instrumento inter duas datas non solum duæ, sed etiam quatuor & sex, imo quotvis medix reperientur. Quod neque per sectiones conicas, neque per modos ullos ab auctoribus supradictis inventos obtineri potest.

Pro duabus mediis opus est normis tribus, pro mediis 4. normis 5. & sic deinceps.

Minor datarum transferatur in regulam YX, & sit YB; major in regulam alteram YZ, & sit YE. Applicetur norma prima ad punctum B, ibidemque firmetur, & aperiuntur regulæ, donec normæ tertiæ latus transeat per E. Dico YC, YD, esse duas medias inter datas YB, YE; hoc est, YB esse ad YC, ut YC est ad YD, & YD ad YE.

Demonstratio manifesta ex coroll. 2. p. 8. l. 6. Nam ex natura instrumenti, in trigono YCD angulus ad C rectus est,

ab eoque cadit CB perpendicularis in basim YD. Ergo per dictum coroll. ut YB est ad YC, sic YC ad YD. Rursum, quia in trigono YDE angulus ad D rectus est, ab eoque cadit perpendicularis DC in basim YE, erit ut YC ad YD, sic YD ad YE. Sunt igitur YB, YC, YD, YE quatuor continue proportionales. Inter datas igitur YB, YE inventæ sunt duæ mediæ YC, YD. Quod erat faciendum.

Si inter datas YB, YG, petantur 4. mediæ, aperi regulas donec normæ quintæ latus FG transeat per G. Erunt YC, YD, YE, YF quatuor mediæ inter YB, YG. Demonstratio patet ex eod. coroll.

Hic modus, quamvis organum sit Platonico illo operosius, plane eximius est, tum quia nihil perficit tentando, tum quia ad 4. & 6. imo quotcunque medias se extendit.

Per duas medias perficitur problema Deliacum, cubi nimirum duplicatio, & corpora quæcunque in data proportionione * augentur vel minuantur, quemadmodum id ipsum in figuris planis efficitur † per unam mediam. Hanc viam primus aperuit Hippocrates, quam ut singularem & unicam, omnis Geometrarum posteritas amplexa est.

* Vide schol. post. 18. l. 12.
† Vide coroll. 3. p. 20. l. 6.

PROPOSITIO XIV.

Parallelogramma equalia (X, Z) qua unum angulum (C) uni (O) habent aequalem, etiam latera circa aequales angulos habent reciproca: (hoc est, AC est ad CB, ut FO ad OL.)

Fig. 29, 30.

Et si latera sic habent reciproca, parallelogramma sunt equalia.

1. Pars. IL & SB productæ concurrant in Q. Parallelogrammum X est ad parallel. R, ut AC (a) ad CB: & Z est (a) Per 1. l. 6. ad (b) R, ut FO ad OL. Sed quia per hyp. X & Z æqualia sunt, X est (c) ad R, ut Z est ad R. Ergo etiam AC est (c) Per 7. l. 5. ad CB, ut (d) FO ad OL. Quod erat demonstrandum. (d) Per 11. l. 5.

Dem. 2. pars. Ut AC ad CB, sic (e) X est ad R: & ut (e) Per 1. l. 6. FO ad OL, sic (f) Z ad R. Sed jam per hyp. AC est ad (f) Per eand. CB, ut FO ad OL. Ergo X est ad R, (g) ut Z est ad R. (g) Per 11. l. 5. Ergo X & Z æqualia (h) sunt. (h) per 9. l. 5.

[Corollarium. Hinc pendet regula proportionum inversa demonstratio. In ea enim datur semper rectangulum aliquod, ut X: & alterius æqualis rectanguli latus unum ut CB: & latus alterum queritur. Est itaque ut AC latus primum rectanguli dati, ad CB latus datum rectanguli alterius; ita reciproce EC latus

latus quæsitum ad CL latus secundum rectanguli dati. Est itaque rectangulum $CB \times FC$ æquale rectangulo $AC \times CL$: & diviso rectangula posteriore dato, per latus datum prioris CB ; Quotiens latus alterum quæsitum exhibebit FC . *Q.E.I.*

PROPOSITIO XV.

Fig. 31, 32.

Equalia triangula (ACL , FCB) quæ unum angulum (C) uni (O) æqualem habent, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca: (hoc est, AC est ad CB , ut FO ad OL).

Et si latera sic habent reciproca, triangula sunt æqualia.

Ducatur recta LB : reliqua demonstratio eadem quæ præcedentis.

Corollarium.

TAM parallelogramma, quam triangula, quæ reciprocant bases & altitudines sunt æqualia: Et e converso, Patet ex duabus præcedentibus.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 33.

Si quatuor rectæ (AB , FI ; IL , BC) fuerint proportionales; (hoc est, si AB sit ad FI , ut IL ad BC ;) Rectangulum (X) sub extremis (AB , BC) æquale est rectangulo (Z) sub mediis (FI , IL).

Et si rectang. sub extremis æquatur rectangulo sub mediis, erunt illæ quatuor rectæ proportionales.

1. Pars. In rectangulis X & Z , circa rectos angulos, ac proinde æquales B , I , per hyp. est AB ad FI , ut reciproce IL ad BC . Ergo (a) X & Z æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

2. Pars. Quoniam X & Z jam ponuntur æqualia; Ergo (b) circa æquales angulos B & I , est AB ad FI , ut reciproce IL ad BC . Quod erat demonstrandum.

[Coroll. (1.) Hinc ad datam rectam lineam AB facile est datum rectangulum Z applicare: faciendo nimirum $AB : FI :: IL : BC$. Est enim Z rectangulum datum ad datam rectam AB applicatum.]

[Coroll.

[Coroll. (2.) Hinc pendet regula proportionum directa de-
monstratio. In ea enim datur semper rectangulum aliquod, ut
CL: & alterum rectangulum simile, cujus latus unum datum
est, quaritur. Erit ergo ut BC latus primum rectanguli dati,
ad EO latus rectanguli quasiti; ita directe CE latus secundum
rectanguli dati ad OA latus alterum quasitum. Est itaque re-
ctangulum $CE \times EO$ aequale rectangulo $BC \times OA$. Et diviso
rectangulo $CE \times EO$ per BC, quotiens latus alterum OA qua-
situm exhibebit. Q.E.I.]

PROPOSITIO XVII.

SI tres recte (AB, FL, BC) fuerint proportiona-
les, rectangulum sub extremis (AB, BC) e-
quale erit quadrato mediae (FL.)

Et si rectangulum sub extremis aequatur quadrato
mediae, erunt tres illa recte proportionales.

1. Pars. Mediae FL accipiatur par O. Quoniam igitur
per hyp. AB est ad FL, ut FL ad BC; estque O par FL;
Erit quoque AB ad FL, ut O ad BC. Ergo (c) rectang. sub ex- (c) per præ.
tremis AB, BC æquatur rectangulo sub mediis FL & O,
hoc est quadrato FL.

2. Pars. Demonstratur similiter ex secunda parte præce-
dentis.

Corollarium.

EX hac & ex 13. patet, si in circulo sit FC perpendicularis Fig. 24.
diametro, rectangulum ACB æquale esse quadrato FC.

[(2.) Si $A \times B$ aequale sit quadrato C; ergo $A : C :: C : B$.]

(3.) Possitis $A : C :: C : B$; Si Cq dividatur per A, quotiens (d) per Cor. 2.
(d) erit B.] p. 16. l. 6.

PROPOSITIO XVIII.

Super data recta (RS) dato polygono (BQ) simile Fig. 35.
similiterque positum describere.

Polygonum datum BQ resolve in triacula. Super data
recta RS fac (a) angulos R, O æquales angulis B, A. Coi- (a) per 23.
bunt latera in X. Super XS fac angulos V, I æquales angu- l. 1.
lis T, C. Coibunt latera in Z. Dico factum.

Nam quia anguli R, O æquantur angulis B, A, etiam E, K (b) per corol.
(b) æquales erunt: & quia etiam (c) V æquatur T, totus EV 9. p. 32. l. 1.
toti KT æqualis erit. Similiter quia (d) singuli O, I æquan- (c) per constr. (d) per constr.
tur

tur singulis A & C, toti OI, AC æquales erunt. Et quia
 (e) *Per constr.* (e) V & I æquantur T & C, etiam Z & Q æquales (f) sunt.
 (i) *Per corol.* Polygona igitur RZ, BQ sibi mutuo æquiangula sunt. Re-
 9. p. 32. l. 1. liquum est ut ostendatur etiam latera esse proportionalia. RS
 (g) *Per 4. l. 6.* est ad BF (g) ut SX ad FL: & rursus SX est ad FL, (h)
 (h) *Per eand.* ut SZ ad FQ. Ergo ex æquo (i) RS est ad SZ, ut BF ad
 (i) *Per 22. l. 5.* FQ, &c.

Corollarium. Hinc Mappas sive Chartas Geographicas, Chorographicas, vel Geodaticas; aut agrorum, adificiorum, regionumque delineationes Ichnographicas construendi methodus derivatur. Nihil enim aliud sibi volunt quam figurarum ingentium ad similes figuras exiguas reductionem, quam præsens propositio exhibet.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 36, 37. **T**riangulorum (X, Z) similium proportio est duplicata proportionis laterum (AC, FI) æqualibus anguli subtensorum.

- (a) *Per 11. l. 6.* Hoc est, si (x) fiat ut AC ad FI, sic FI ad tertiam AQ; triang. X est ad triang. Z, ut AC prima ad tertiam proportionalem AQ. Vide defin. 10. 5.
 (b) *Per 4. l. 6.* Quoniam triangula X, Z sunt similia, erit BA ad LI, (b) ut AC ad IF. Sed per constr. ut AC ad IF, sic IF ad AQ.
 (c) *Per 11. l. 5.* Ergo etiam BA est ad LI, (c) ut IF ad AQ. Ergo in triangulis QBA & Z, latera circa angulos A, I, qui per defin. triangulorum similium æquales existunt, sunt reciproca. Æquantur igitur (d) QBA & Z. Atqui triangulum X ad QBA est ut (e) basis AC ad basim AQ. Ergo etiam X est ad Z, ut AC ad AQ. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Hinc corrigendus est eorum error qui figurarum similium eandem atque laterum rationem esse opinantur. Si enim duorum, non tantum triangulorum similium, sed & quadratorum, pentagonorum, hexagonorum, &c. aut etiam circulorum latera sive diametri sint inter se ut 2 ad 1, Ipsa figura sive area erunt ut 4 ad 1: si latera sint inter se ut 3 ad 1, erunt figura ipsa sive area ut 9 ad 1; in duplicata scilicet laterum ratione.

PROPOSITIO XX.

Fig. 38. **S**imilia polygona (ABCDE, FGHIK) dividuntur (1) in similia triangula (P, S & Q, T & R, V) numero aequalia: (2.) & totis proportionalia

nalia: (3) & polygonorum proportio duplicata est proportionis laterum (AB, FG) inter aequales angulos (B, G & BAE, GFK) existentium.

1. Pars. Quoniam polygona sunt similia, erunt (a) fibi (a) *Per def. 1.* mutuo æquiangula, eruntque bini binis æquales anguli BAE, ^{l. 6.} GFK, & B, G, & BED, GHI, & CDE, HIK, & E, K. Quia igitur AB est ad BC, (b) ut FG ad GH, angulique (b) *Per eand.* B & G æquales sunt, similia (c) sunt triangula P, S. Simi- (c) *Per 6. l. 6.* liter demonstrabitur similia esse R. & V. Deinde quia toti BCD, GHI, & ablati BCA, GHF æquales sunt, etiam reliqui ACD, FHI æquales erunt. Eodem modo ostendam æquari ADC, FIH. Ergo (d) tertius CAD tertio HFI (d) *Per corol.* æqualis est. Quare (e) etiam Q & T triangula similia sunt. ^{9. p. 32. l. 1.} (e) *Per 4. l. 6.* Liquet ergo 1. Pars.

Pars 2. Quoniam similia sunt P & S, ratio P ad S duplicata est (f) rationis CA ad HF. Sed ob eandem causam (f) *Per prac.* etiam ratio Q ad T duplicata est rationis CA ad HF. Ergo P est ad S ut (g) Q ad T. Eodem modo ostendam ut Q (g) *Per 34.* est ad T, ita R esse ad V. Ergo ut (h) unum antecedens P (h) *Per 12.* est ad unum consequens S, ita omnia antecedentia P, Q, R si- ^{l. 5.} mul sumpta, ad omnia consequentia S, T, V simul sumpta, hoc est polygonum ad polygonum. Quod erat alterum.

3. Pars. Ratio P ad S est (i) duplicata rationis AB ad (i) *Per prac.* FG. Sed ratio polygoni ad polygonum est eadem cum ratione P ad S, ut jam ostendi. Ergo etiam ratio polygoni ad polygonum est duplicata rationis AB ad GF. Quod erat tertium.

Corollaria.

1. **O**Mnes figuræ ordinatæ seu regulares, ut æquilatera tri-
angula, quadrata, pentagona, &c. sunt inter se in ra-
tione duplicata laterum. Omnes enim ordinatæ sunt similes
inter se, ut patet ex def. 1. 6.

2. Si figurarum quarumvis similibus latera AB, FG inter ^{Fig. 38.}
æquales angulos posita, sint nota, etiam proportio figurarum
innotescet. Sit ex. gr. AB 2. ped. & FG 6. pedum, fiat ut
2. ad 6. ita 6. ad alium numerum nempe 18. Figura minor
est ad maiorem, ut 2. ad 18. seu ut 1. ad 9. Invenitur autem
tertius proportionalis numerus, si (k) secundus datorum mul- (k) *Per Cor. 3.*
tiplicetur per seipsum, & productus per primum dividatur. ^{p. 17. l. 6.}

3. Ex eadem propositione elicitur methodus præclara, figu-
ram quamvis rectilineam augendi vel minuendi in ratione da-
ta. Ut si velim pentagoni, cujus latus est AB, aliud facere ^{Fig. 39.}
quintuplum: Inter terminos rationis datæ AB, BC, inveni

(n) *mo*

(a) per 13. l. 6. (a) mediam proportionalem BX. super hac construe (b)
(b) per 18. l. 6. pentagonum simile dato. Hoc erit quintuplum dati.

Nam per 20. pentagonum AB est ad sibi simile BX, ut AB prima ad BC tertiam.

Porro cum etiam circulorum proportio sit duplicata proportionis diametrorum, ut ostendetur p. 2. l. 12. Hæc praxis ad circulos quoque pertinebit.

Fig. 41.

[Schol. Cum quadratorum E, K proportio duplicata sit proportionis laterum OR, SV; inde ratio duplicata laterum OR, SV, per rationem ORq ad SVq sapissime designari solet.]

PROPOSITIO XXI.

Fig. 40.

Figura (A, B) qua eidem (C) similes sunt, etiam sibi mutuo similes sunt.

Patet ex defin. 1. l. 6. ex axiom. 1. l. 1. & propof. 11. l. 5.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 40, & 41.

Si quatuor aut plures rectæ (FI, LQ, & OR, SV) proportionales fuerint; figurae similes, similiterque ab iis descriptæ (A, B, & E, K) proportionales erunt.

Et e converso.

Demonstratio primæ partis patet ex 34. 5. Quoniam enim
(a) Per 19. (a) rationes A ad B, & E ad K sunt duplicatæ rationum FI & 2c. l. 6. ad LQ, & OR ad SV, ex hypothese æqualium; etiam ipsæ æquales erunt.

Pars 2. patet ex 35. l. 5.

Fig. 24.

[Corollarium. Si recta linea AB secta sit utcumque in C; rectangulum sub partibus AC, CB contentum, est medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum contentum sub tota AB & una parte AC vel CB, est medium proportionale inter quadratum totius AB, & quadratum dictæ partis

*Corol. 1. p. 8. AC vel CB. Liqueat enim esse * AC : CF :: CF : CB. Ergo

l. 6.

AC quadratum : CF quadratum :: CF quadratum : CB quadratum. Hoc est, + AC quadratum : rectangulum ACB :: rectangulum ACB : CB quadratum. Q.E.D.

*Corol. 2. p. 8.

Porro BA : AF :: AF : AC. Ergo BAq : AFq :: AFq :

l. 6.

ACq. Hoc est, + BAq : BA C rectang. :: BA C rectang. ACq :

† p. 17. l. 6.

Eodem modo ABq : ABC :: ABC : BCq. Q.E.D.]

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

E Quia angula parallelogramma (X, Z) inter se *Fig. 42.*
rationem habent compositam ex rationibus late-
rum (AC ad CB , & LC ad CF .)

Hoc est, si fiat CB ad O , ut LC ad CF , X est ad Z , ut AC ad O . Vide quæ demonstravimus l. 5. parte 3. num. 13.

Concurrent IL, SB in Q . Parallelogrammum X est (a) ad (a) per 1. l. 6.
parallelogrammum R , ut AC ad CB : & R est ad Z , (b) ut (b) per eand.
 LC ad CF , (hoc est ut CB ad O .) Ergo (c) ex æquo X est (c) per 22.
ad Z , ut AC ad O . Quod erat demonstrandum.

Corollaria.

Hinc & ex 34. l. 1. patet primo. Triangula quæ unum *Fig. 42.*
angulum (ad C) æqualem habent, rationem habere com-
positam ex rationibus rectarum AC ad CB , & LC ad CF
æqualem angulum continentium.

Patet 2. Rectangula, ac proinde & parallelogramma quæ-
cunque, rationem inter se habere compositam ex rationibus
basis ad basim & altitudinis ad altitudinem. Neque aliter de
triangulis ratiocinaberis.

Patet 3. Quo modo triangulorum ac parallelogrammorum *Fig. 42.*
proportio exhiberi possit. Sinto parallelogramma, X & Z , &
eorum bases AC, CB , altitudines CL, CF . Fiat * ut CL al- * per 12. l. 6.
titudo ad altitudinem CF , ita basium altera CB ad O , Paral-
lelogrammum X est ad parallelogram. Z , ut AC est ad O .

PROPOSITIO XXIV.

In omni parallelogrammo (SF ,) quæ circa (AB) *Fig. 43.*
diametrum sunt parallelogramma (CL, OI ,) &
toti & inter se similia sunt.

Per 27. 1. æquales sunt anguli C, S , & L, F . Per eandem
 E est par I , hoc est per eandem ipsi $A; B$ vero & toti SF ,
& parti CL communis est. Igitur totum SF & pars CL
æquiangularia sunt. Reliquum est, ut etiam latera æqualibus an-
gulis opposita habeant proportionalia.

Quoniam in triangulis BCE, BSA , est CE parallela ad (a) per coroll.
 SA , erit (a) BC ad CE , ut BS ad SA : & CE est ad EB , 1. 2. 4. l. 6.
ut (b) SA ad AB . Quia vero in triangulis quoque ELB , (b) per idem
 AFB , EL est parallela ad AF , erit EB ad EL , ut (c) AB (c) per idem
ad coroll.

(d) Per 22. l. 5. ad AF. Ergo ex æquo (d) CE est ad EL, ut SA ad AF.
 (e) Per defin. Igitur (e) CL & totum SF similia sunt. Eodem modo ostendam OI esse simile toti SF. Ergo (f) CL & OI sunt
 l. 6. etiam similia inter se. Quæ erant demonstranda.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 46.

Polygonum datum (A) in aliud dato (B) simile transmutare.

Sive polygonum constituere æquale dato A, & simile alteri dato B.

Super CF latere polygoni B, cui simile petitur, fac rectangulum Q (a) æquale B. Deinde super FS fac (b) rectangulum R æquale A. Manifestum est CF & FI esse in directum. Inter CF, FI inveni (c) mediam proportionalem FL. (d) Per 18. l. 6. Super hac fac (d) polygonum simile dato B, erit hoc etiam æquale dato A.

Nam cum per constr. sint tres proportionales CF, FL, FI, polygonum B est ad simile sibi polygonum super FL factum, (e) ut CF ad FI; hoc est (f) ut Q ad R. Igitur permutando ut polygonum B est ad Q, ita polygonum FL ad R. Sed per constr. polygonum B æquatur Q. Ergo etiam polygonum super FL, simile ipsi B, æquatur R, hoc est, per construct. dato A. Factum est igitur quod petebatur.

PROPOSITIO XXVI.

Parallelogramma similia (BD, FN) habentia angulum communem (A) circa eandem diametrum existunt.

Fig. 44.

Duc rectas AE, CE. Si negas AEC esse diametrum communem parallelogrammorum BD, & FN; ipsius BD diameter esto recta alia AGC secans FE in G, & duc parallelam GH. Parallelogramma igitur FH, BD existent circa communem diametrum AGC, ac proinde * erunt similia. Ergo ut BA ad AD, † sic FA ad AH. Sed etiam ut BA ad AD, sic FA ad AN, cum BD, FN similia sint per hyp. Ergo FA est ad AH, ut FA ad AN. Quod est absurdum.

PROPOS. XXVII, XXVIII, XXIX.

Tironibus facessum negotium, & nullius fere sum usus.

PRO.

PROPOSITIO XXX.

D Atam rectam (AB) ita secare, ut tota (AB) Fig. 45.
sit ad unum segmentum (AC) sicut idem seg-
mentum est ad reliquum (CB .)

Hoc est (ut loquuntur Geometræ) lineam extrema ac me-
dia ratione secare.

Per 11. 2. ita seca AB in C , ut rectangulum sub AB , CB ,
sit æquale quadrato AC . Dico factum.

Erit enim per 17. ut AB ad AC , sic AC ad CB .

Hujus sectionis vis admirabilis est in corporum regularium
inscriptione & comparatione.

PROPOSITIO XXXI.

S I a lateribus trianguli rectanguli (ACB) sign- Fig. 47.
re similes quæcunque describantur, erit ea qua
opponitur recto angulo duabus simul reliquis (L , R)
æqualis.

Propositio igitur 47. l. 1. hic redditur universalis.

Ab angulo recto C demittatur perpendicularis CO . Quo-
niam AB , BC , BO sunt (a) tres proportionales, erit F ad (a) Per coroll.
sibi similem R , (b) ut AB prima ad BO tertiam. Rursum a . p. 8. l. 6.
quoniam (c) BA , AC , AO sunt proportionales, erit F ad (b) Per 10.
sibi similem L , ut (d) BA prima ad AO tertiam. Quia igitur l . 6. & per
tur est F ad R , ut AB ad BO , & F ad L , ut AB ad AO , (c) Per coroll.
erit quoque F ad R & L simul sumptas, ut (e) AB ad BO , a . p. 8. l. 6.
 AO simul sumptas. Sed AB duabus BO , AO æqualis est. (d) Per 20.
Ergo etiam F duabus R & L æqualis erit. Quod erat de- l . 6. & defin.
monstrandum. 10 . l . 5.
(e) Per 24. l. 5.

Corollarium.

EX hac propositione facile dabitur quotcunque figuris fi-
milibus rectilineis quibuscunque una omnibus æqualis
& similis, eadem prorsus methodo, qua probl. 1. scholii
post 47. l. 1. exhibetur datis quotlibet quadratis unum æquale.
In demonstratione tantum pro 47. l. 1. citetur 31. l. 6.

Coroll. (2.) Circulus super hypotenusam trianguli rectanguli
æqualis est duobus circulis super latera descriptis. Sunt enim
circuli omnes sibi similes; & ad se invicem ut * quadrata dia- * Per 2. l. 12.
metrorum.

Corol.

Fig. 54.

[Coroll. (3.) Hinc itaque Lunularum quadraturam, quam primus docuit Hippocrates Chius, possumus derivare. Sit enim ABC triangulum rectangulum: & BAC semicirculus diametro BC : BNA semicirculus diametro AB : AMC semicirculus diametro AC descriptus. Est itaque semicirculus BAC semicirculis BNA & AMC equalis. Si itaque spatium utrimque commune auferas BA , AC , relinquentur dua lunula BNA AMC , utrimque lineis circularibus terminata, triangulo rectilineari BAC aequales. Et si linea BA equalis sit linea AC , demissa perpendiculari ad hypotenusam BC , erit triangulum BAO aequale lunula BNA , & triangulum COA aequale lunula CMA . Q.E.I.]

PROPOSITIO XXXII.

VIX habet usum; nec quidquam habet notabile.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 55.

IN equalibus circularis vel eodem, anguli sive ad centra (ut ABC , FOD) sive ad peripheriam (ut ARC , FSD) cum inter se rationem habent, quam arcus (AKC , FGD) quibus insistant. Idem intellige de sectoribus.

Quod attinet ad angulos centri & sectores, demonstrabitur eodem profus modo, quo prop. 1. hujus libri demonstratum est triangula aequae alta esse ut bases. Tantum ubi isthic citatur prop. 38. l. 1. hic citetur 29. lib. 3.

* pr. 20. l. 3.

Quoniam vero ad peripheriam anguli R & S dimidii * sunt angulorum ad centrum ABC , FOD , quod de his ostensum est, liquebit etiam de illis.

Corollaria.

Fig. 49.

1. Angulus centri (BAC) est ad quatuor rectos, ut arcus BC cui insitit, ad totam circumferentiam.

Nam ut BAC est ad rectum BAF , ita per hanc 33. arcus BC ad quadrantem BF . Ergo angulus BAC est ad 4. rectos, ut arcus BC est ad 4. quadrantes, hoc est ad totam peripheriam.

2. Inaequalium circularum arcus IL , BC , qui aequales subtendunt angulos, sive ad centra ut IAL , & BAC , sive ad peripheriam, sunt similes.

Nam

uam
nim
me-
rcu-
s se
rin-
NA
ecti-
1C.
lum
lu-

na-

ad
am
ent,
lem

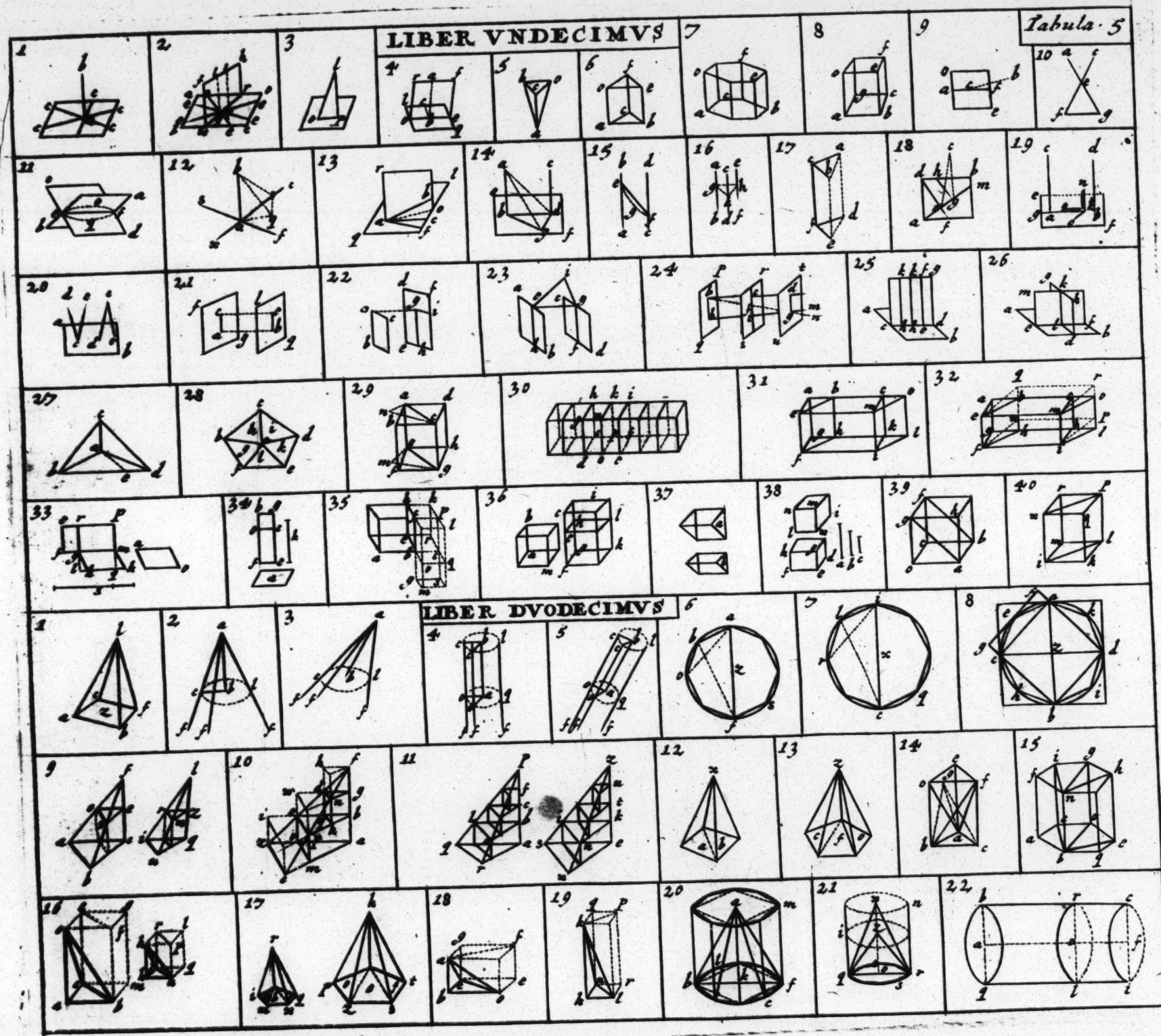
itur
um
ci-
unt
um

ous

ar-
14.
am

ales
five

am



Nam
hoc est
phieriam
est ad f
mills ar
3. D
arcus au
4. Se
(K, O,)
Nam
BKC,

Nam arcus $I L$ est ad suam peripheriam, * ut angulus $I A L$, * per coroll. 1.
hoc est ut $B A C$, ad 4. rectos; & arcus $B C$ est ad suam per-
pheriam, † ut idem angulus $B A C$ ad 4. rectos. Ergo $I L$ † per idem
est ad suam peripheriam, ut $B C$ ad suam. Ergo * sunt si-
miles arcus $I L$ & $B C$. * per definit.
4. l. 6.

3. Duæ semidiametri ($A B$, $A C$) a concentricis peripheriis
arcus auferunt similes $I L$, $B C$. Patet ex coroll. 2.

4. Segmenta ($B K G$, $I O L$) quæ angulos capiunt æquales
(K , O ,) similia sunt.

Nam per coroll. 2. arcus $B C$, $I L$, ac pròinde etiam arcus
 $B K C$, $I O L$ similes sunt.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER UNDECIMUS.

NOBIS SEPTIMUS.

SEX libris primis subjungit Euclides elementa numerorum tribus sequentibus septimo, octavo & nono comprehensa, quibus etiam decimum de quantitibus incommensurabilibus adjungit. Nos a planis immediate transimus ad solida. De numeris seorsum tractaturi. Id, opinor, discentibus commodius erit, si elementa Geometriæ nulla alia tractatione interrupta, simul omnia habeantur. Nihilominus cum citabimus propositiones hujus & sequentis libri, eos non septimum & octavum, sed undecimum & duodecimum appellabimus, ne, si ab ordine Euclideo ubique recepto discedamus, propositionum citatio implicatio reddatur.

Hic liber duas quodammodo partes complectitur. In prima jaciuntur fundamenta, quibus solidorum, hoc est, corporum doctrina universa nititur. Altera parallelepipedorum affectiones proponuntur.

PRima solidorum Principia Undecimus hicce Elementorum Liber proponit. Neque sane Corporum proprietates sine eo cognosci queunt: & si Mathematicum partes plerasque omnes sine solidorum scientia aggrediamur, frustra erimus. Doctrina enim Theodosii Sphærica; Trigonometria etiam Sphærica; pars magna Geometria Practica, Statica, atque Geographia eidem innituntur, & Qua occurrunt paulo difficiliora in Gnomonica. Sectionibus Conicis, Astronomia, Perspectiva, atque Optica universa intellectis rite Solidorum principis faciliora redduntur. Adeo ut qui Geometria Elementa omissis fere & posthabitis hoc & sequenti libro tradiderunt, eadem manca admodum, atque plane imperfecta tradidisse sint censendi.

DEFINITIONES.

1. **S**olidum sive corpus est, quod longitudinem, latitudinem & profunditatem habet.
2. Solidi extremum est superficies.

3. Linea

3. Linea recta (AB) est ad planum (CG) recta five perpen- Fig. 1. l. 11.
dicularis, cum ad rectas omnes lineas (CA) in plano (CC) du-
ctas, a quibus illa tangitur, angulos rectos facit (BAC, BAC.)

4. Planum ad planum rectum five perpendiculare est, cum Fig. 2.
omnes rectæ lineæ (LQ,) quæ communi planorum sectioni
(XR) perpendiculares ducuntur in planorum uno, rectæ
sunt alteri plano (ABCO.)

5. Si recta linea (OL) plano insistat non ad rectos angu- Fig. 3.
los, & a sublimi ejus puncto (L) ad planum ducatur per-
pendicularis LP jungaturque PO; angulus LOP dicitur in-
clinatio lineæ OL ad planum.

6. Si planum (RE) plano (LQ) non insistat perpendi- Fig. 4.
culariter, alterius ad alterum inclinatio est acutus angulus
(ABC) qui continetur a rectis lineis (AB & BC) quæ
in utroque plano ad communem sectionem (OE) ducun-
tur perpendiculares.

7. Planum ad planum similiter inclinatum dicitur, at-
que alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli
sunt æquales.

8. Parallela plana sunt, quæ in omnem partem produ-
cta æqualibus semper intervallis distant.

9. Similes figuræ solidæ rectilineæ sunt, quæ similibus
planis continentur, multitudine æqualibus.

10. Angulus solidus rectilineus est, qui pluribus quam Fig. 5.
duobus planis angulis (BAC, CAO, OAB) non in eodem
existentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, con-
tinetur.

11. Æquales solidi anguli sunt, qui intra invicem positi
congruunt.

Quemadmodum angulus planus est inclinatio linearum, ita
solidus angulus est inclinatio superficierum. De utroque
igitur eodem modo ratiocinandum erit. Consule scholium
post prop. 16. l. 3.

12. Prisma est figura solida, planis comprehensa, quorum Fig. 6, 7, 8.
adversa duo (OFE, ACB) sunt parallela, æqualia & similia.

13. Parallelepipedum est solidum ex quadrilateris ex ad- Fig. 8.
verso parallelis comprehensum.

14. Si sex plana ex adverso parallela sint quadrata, soli-
dum iis comprehensum cubus erit.

PROPOSITIO PRIMA.

Recta lineæ pars una (AC) nequit esse in sub- Fig. 9.
jecto plano (OE,) altera (CB) extra planum.

L

Per

Per se clarum est ex definitione plani & lineæ rectæ. Vide defin. 7. & 4. l. 1.

PROPOSITIO II.

Fig. 10.

O *Mne triangulum in uno est plano. Et dua rectæ se mutuo secantes in eodem plano sunt.*

Prima pars per se clara est, cum triangulum nihil sit aliud quam plana superficies tribus rectis comprehensa. Ex quo etiam patet pars altera.

PROPOSITIO III.

Fig. 11.

S *I duo plana (AB, CD) se mutuo secant; (EF) communis eorum sectio est recta linea.*

Patet ex definitione plani. Licebit tamen sic demonstrare: si EF sectio communis non est recta linea, ducatur in plano CD recta EOF, & in plano BA recta EQF. Dux igitur rectæ EOF, EQF claudent spatium. Quod est absurdum.

PROPOSITIO IV.

Fig. 12.

S *I recta (BA) duabus rectis (CAX, FAS) se mutuo secantibus perpendicularis existat; etiam plano per ipsas ducto perpendicularis erit.*

Si negas, alia recta BQ plano rectarum AC, AF sit perpendicularis. Junge AQ. & huic in plano FAC duc perpendicularem QO. Hæc producta, necessario secabit (a) aliquam rectarum CAX, FAS vel utramque, ubicunque tandem fuerit punctum Q. Secet ergo CAX in O, jungaturque BO. Quoniam ergo angulus BAO per hyp. rectus est.

(b) Per 47.
l. 1.

erit quad. BO. æ. (b) quad. BA, }
quad. AO. }

(c) Per defin. Sed quia BQ ponitur recta. plano FAC, ac proinde (c) rectum facit cum AQ angulum BQA; est

(d) Per 47.
l. 1.

quad. BA. (d) æ. quad. BQ }
quad. AQ. }

Et quia angulus AQO per const. rectus est;

(e) Per eand.

quad. AO. æ. (e) quad. OQ }
quad. AQ. }

Ergo

Ergo quad: BO. $\propto$ quad. BQ

quad. OQ

quad. AQ bis.

} .

Ergo quad. BO majus est [quadratis] BQ & OQ; ac proinde * angulus BQO rectus non est. Ergo BQ non est recta * Patet en. eadem.

† plano CAF. Liqueat ergo quæsitum.

† Patet en. defin. 3. l. 11.

Scholium.

EX eo quod ponebatur BQ esse recta plano FAC; directe est demonstratum BQ non esse rectam plano FAC: ac proinde ex eo quod negaretur assertio theorematis, eadem assertio directe probata est. Hæc demonstratio quoad substantiam est Joannis Ciermans.

PROPOSITIO V.

SI tres rectæ (BA, CA, FA) eidem rectæ (AR) Fig. 13. ad idem punctum (A) sint perpendiculares; tres illæ erunt in uno plano.

Sit enim, si fieri potest, earum una BA in alio plano RO, quod secet LQ planum duarum reliquarum CA, FA, recta AO. Quoniam RA per hyp. perpendiculariter insitit duabus CA, FA, plano LQ recta * erit. Ergo cum AO rectum * Per prat. facit † angulum RAO. Sed etiam ex hyp. angulus RAB † per defin. rectus est. Ergo anguli RAB & RAO æquales sunt. Quod 3. l. 11. est absurdum.

PROPOSITIO VI.

LINEA recta (AB, CD) quæ eidem plano (CF) Fig. 14. sunt perpendiculares, inter se sunt parallela.

Postulari poterat ut per se notum; licebit tamen sic demonstrare.

Juncta BD, fac in plano FE, lineam DG normalem ad BD & parem BA, junganturque DA, GA, GB. Rectæ BD, DG æquantur BD, (a) BA; & anguli BDG, (b) DBA sunt recti. Ergo AD, BG (c) sunt æquales. Igitur trian- (d) per constr. gula ABG, GDA sibi mutuo æquilatera sunt, ac proinde (e) per defin. anguli ABG, ADG æquales. Sed ABG (d) rectus est. Quare (e) per prat. & ADG rectus. Sunt vero & BDG ex constr. & CDG per (f) per prat. definit. 3. recti. Ergo GD ad tres CD, AD, BD, recta est. (g) Per 2. Ergo CD cum AD, BD est in uno (h) plano. Sed etiam AB cum AD, BD (f) in uno plano est. Ergo AB, CD sunt in uno (g) plano. Ergo cum anguli ABD, CDB sint (g) recti, erunt (h) AB, CD (h) parallela. Quod erat demonstrandum.

L 2

PRO-36. l. 1.

PROPOSITIO VII.

Fig. 15.

Rectæ (EF) secans rectas (AB , CD) positas in eodem plano, in uno est cum ipsis plano.

Postulari poterat. Qui volet sic demonstrat.

Planum rectarum AB , CD secet aliud planum per puncta E , F . si jam EF non est in plano AB , CD , non erit EF communis sectio. Sit ergo EGF . Ergo EGF * est linea recta. Duæ igitur rectæ EF , EGF concludunt spatium. Quod est absurdum.

Corollarium.

Hinc sequitur si EF secat parallelas AB , CD , in eodem esse cum ipsis plano; omnes enim parallelæ [hoc * Per defin. 36. l. 1. est duæ quævis] * sunt in uno plano.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 14.

Si parallelarum (AB , CD) una (AB) plano (EF) sit recta; etiam altera (CD) eidem plano erit recta.

Poterat postulari. Si demonstratio quaeritur, fere similis ea est demonstrationi propositionis 6.

[Ductis BD , AD ; in plano EF fac GD normalem ad BD .

(a) Vide de- Erit quoque (a) normalis ad AD . Ergo GD (b) recta erit plano monfr. p. 6. ABD , hoc (c) est, plano $CDBA$. Quare angulus CDG (d) rectus est. Sed angulus CDB est etiam rectus; (utpote cum m- l. 11. (b) Per 4. l. 11. gulo ABD (e) recto, duos rectos (f) consiciens.) Ergo CD (g) (c) Per coroll. perpendicularis est plano GDB , seu EF . Quod erat demon- prac. strandum.] (d) Per defin. 3. l. 11.

(e) Per eand.

(f) Per 27. l. 1.

(g) Per 4. l. 11.

Fig. 16.

PROPOSITIO IX.

Rectæ (AB , EF) quæ sunt eidem rectæ (CD) parallelæ, licet non in eodem cum illa plano, etiam sunt inter se parallelæ.

Quamvis postulari posset, licebit tamen sic demonstrare.

In plano parallelarum AB , CD , duc GK normalem ad CD .

Item in plano parallelarum EF , CD , duc HK normalem ad CD . Ergo * CK recta est plano GKH . Ergo cum † per 8. l. 11. AG , EH sint parallelæ ad CK , erunt AG , EH † rectæ plano * per 6. l. 11. no GKH . Ergo AG , EH * sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO X.

SI due rectæ (AC, BC) sint parallele duabus re-^{Fig. 17.}
ctis DF, EF ; licet non sint in eodem plano, æ-
quales angulos ($C \& F$) comprehendunt.

Fiant CA, CB æquales FD, FE , & ducantur DE, AB, DA, FC, EB . Cum AC, FD sint parallelæ & æquales, etiam AD, CF (a) parallelæ sunt & æquales. Similiter ostendam (a) *Per 33. l. 1.*
 BE, CF esse parallelas & æquales. Ergo etiam AD, BE
sunt (b) parallelæ & (c) æquales. Æquantur (d) ergo AB, DE . (b) *Per præc.*
Cum igitur triangula BAC, EDF sibi mutuo sint (c) *Per axiō 1.*
æquilatera, anguli $C \& F$ (e) æquales erunt. Quod erat (d) *Per 33. l. 1.*
demonstrandum. (e) *Per 8. l. 1.*

PROPOSITIO XI.

AD planum datum (AB) a dato extra illud ^{Fig. 18.}
puncto (C) perpendicularem ducere.

Constr. In plano AB duc quamvis DF , ad quam ex C per-
pendicularem describe CE . Ad eandem per E , in plano AB
perpendicularem duc AEM . Tum ad AM ex C perpendi-
cularem demitte CG . Dico CG plano AB rectam esse.

Per G ponatur HG parallela ad DF .

Per const. DE recta est ad $CE \& EM$. Ergo DE recta
(f) est plano CEM : adeoque & (g) HG . Ergo (h) CG (f) *Per 4. l. 11.*
recta est ad HG . Sed & CG ex const. recta est ad EM . (g) *8. l. 11.*
Ergo CG (i) recta est plano AB . Quod erat propositum. (h) *Per defin.*
3. l. 11.

[Scholium. *Præctice sic. Ad punctum A datum affigatur* (i) *Per 4. l. 11.*
funiculus; & ab ejusdem longitudine & tensione dati extremi- ^{Fig. 20. l. 12.}
tate B describatur in plano dato circulus BCFL. Linea AK
punctum datum & circuli centrum connectens erit plano dato
perpendicularis.]

PROPOSITIO XII.

EX dato plani (EF) puncto (A) rectam ad da-^{Fig. 19.}
tum planum erigere.

A quovis extra planum EF puncto D , fac DB ad planum
* EF rectam. Junctæque BA , duc AC parallelam DB . * *per præc.*
Dico factum. Demonstratio patet ex 8.

Scholium.

PRæctice per datum punctum perpendicularis ducitur dato
plano, si norma OKN ad datum punctum applicetur,
[& circumrotetur.]

PROPOSITIO XIII.

Fig. 20.

L Ince ex eodem puncto ducta (DC , EC) nequeunt
 amba ad idem planum (AB) esse recta.

Alias enim per 6. forent parallelæ. Quod fieri non potest.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 21.

S I eadem recta (AB) ad duo plana (FG , LQ)
 perpendicularis est; plana erunt parallela.

Sumatur in planorum alterutro FG quodvis punctum C ,
 ex quo ducatur CE parallela ad AB , occurrens plano LQ in
 (a) Per 8. l. 11. E . Erit CE etiam (a) recta plano utrique FG , LQ . Quare
 (b) Per defin. si jungantur rectæ AC , BE , erunt anguli A , B (b) recti. Ergo
 3. l. 11. AC , BE sunt (c) parallelæ. Ergo $ACEB$ parallelogrammum
 (c) Per 29. l. 3. est, ac proinde CE , quam jam ostendi utrique plano esse per-
 (d) Per 34. l. 1. pendicularem, æquatur (d) AB . Eodem modo ostendam
 omnes utrique plano perpendiculares esse æquales. Ergo pla-
 (e) Per defin. na (e) sunt parallela. Quod erat demonstrandum.
 8. l. 11.

PROPOSITIO. XV.

Fig. 22.

S I rectæ duæ se mutuo tangentes (BA , CA) ad
 duas alias se mutuo tangentes (ED , FD) sint
 parallela; etiam plana per ipsas ducta erunt paral-
 lela.

Ex A ducatur AG recta ad planum EF , ponanturque GH ,
 (a) Per 9. l. 11. GI , parallelæ ad DE , DF . Erunt hæ (a) parallelæ etiam ad
 (b) Per defin. AB , AC . Cum igitur anguli IGA , HGA , sint (b) recti; erunt
 3. l. 11. etiam (c) CAG , BAG recti. Ergo GA , quæ ad planum EF
 (c) Per 27. l. 1. est recta, etiam recta (d) est plano BC . Ergo plana (e) BC ,
 (d) Per 4. l. 11. EF sunt parallela. Quod erat demonstrandum.
 (e) Per præc.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 23.

P Lanum ($EHFG$) secans parallela plana (AB ,
 CD) in iis facit sectiones (EH , GF) paral-
 las.

(a) Per schol. Si non, cum sint in eodem plano secante, convenient (a) ali-
 post 31. l. 1. cubi in I . Quare cum totæ HEI , FGI sint (b) in planis AB ,
 (b) Per 1. l. 11. CD

CD productis, etiam hæc convenient in I. Quod est absurdum, contra definitionem 8. hujus.

PROPOSITIO XVII.

Parallela plana rectas lineas (BD & GH) proportionaliter secant. Fig. 24.

Ducantur in planis PQ, TV rectæ BH, GD, item BG occurrens plano RS in F, junganturque FC, FI. Planum trianguli BGD secans parallela plana, facit sectiones CF, DG (a) parallelas. Ergo est BC ad CD, ut (b) BF ad FG. Rursum triangulum BHG secans parallela plana facit sectiones (c) BH, FI parallelas. Ergo est HI ad IG, ut (d) BF ad FG; hoc est (quod jam ostendi) ut BC ad CD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Si recta linea (FE) sit ad planum (AB) recta; Fig. 25.
omnia, quæ per ipsam ducuntur plana, sunt eidem plano (AB) recta.

Ductum sit per FE planum aliquod GC faciens cum AB sectionem CD. In hoc ducantur HK normales ad CB sectionem communem. Cum igitur etiam (a) FE recta sit ad CD; erunt KH (b) parallelae ad FE. Sed FE ponitur recta plano AB. Ergo & HK rectæ (c) sunt plano AB. Ergo GC planum (d) plano AB rectum est.

PROPOSITIO XIX.

Si duo plana (MF, GD) se secantia, sint ambo recta eidem plano (AB); erit etiam communis illorum sectio (KL) recta plano (AB.) Fig. 26.

Quoniam planum MF ponitur rectum plano AB; ex def. 4. patet ex puncto L posse in plano MF duci rectam perpendicularem plano AB, eam nempe quæ ex L esset in plano MF perpendicularis ad communem sectionem EF. Similiter, quia planum GD ponitur perpendiculare ad AB, ex def. 4. patet in plano GD posse duci ex puncto L perpendicularem plano AB. Sed ex puncto L tantum * una potest duci perpendicularis plano AB. Ergo necesse est ut recta quæ ex L perpendicularis est plano AB, existat in utroque plano MF & GD, ac proinde sit ipsa planorum MF & GD communis sectio LK. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Fig. 27.

SI angulus solidus (*A*) tribus planis angulis (*BAC*, *CAD*, *DAB*) continetur; horum duo quilibet reliquo sunt majores.

- Si tres plani sunt æquales; patet assertio: Si inæquales, maximus esto *BAD*. Hic nihilominus minor est duobus reliquis. Ex maximo enim *BAD* abscinde *BAE* parem *BAC*, fiantque æquales *AC*, *AE*. Per *E* ducatur recta occurrens ipsis *AB*, *AD* in *B* & *D*; junganturque *BC*, *DC*. Quoniam
- (a) *Per constr.* anguli (*a*) *BAE*, *BAC* æquales sunt, & latera *BA*, *AE* æ-
- (b) *Per 4. l. 1.* qualia lateribus *BA*, *AC*, etiam bases *BE*, *BC* æquales (*b*)
- (c) *Per 20.* erunt. Quoniam vero *BC*, *CD* (*c*) majores sunt quam *BD*,
- l. 1.* ablatis æqualibus *BE*, *BC*, remanet *CD* major quam *ED*.
- (d) *Per constr.* Sed latera *EA*, *AD* æquantur lateribus (*d*) *CA*, *AD*. Ergo
- (e) *Per 25.* angulus (*e*) *CAD* major est quam *EAD*. Cum igitur *BAC*
- l. 1.* par sit ostensus *BAE*. Erunt duo simul *BAC*, *CAD* majores toto *BAD*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 28.

PLani anguli, solidum angulum quemcunque componentes, quatuor rectis sunt minores.

- Est solidus angulus *A*. Planis angulis illum componentibus subtendantur rectæ *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FB* in uno plano existentes. Quo facto constituitur pyramis, cujus basis est polygonum *BCDEF*, vertex *A*, totque cincta triangulis *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, quot plani anguli componunt solidum *A*. Jam
- (a) *Per præc.* vero quia duo anguli *ABF*, *ABC* (*a*) majores sunt uno *FBG*, & duo *ACB*, *ACD* majores uno *BCD* & sic deinceps; erunt triangulorum *G*, *H*, *I*, *K*, *L* circa basim anguli simul sumpti, omnibus simul angulis baseos *B*, *C*, *D*, *E*, *F* majores. Sed anguli baseos una cum quatuor rectis faciunt bis tot
- (b) *Per theor. 2. schol. post. 32. l. 1.* rectos, (*b*) quot sunt latera, sive quot triangula. Ergo omnes triangulorum circa basim anguli, una cum quatuor rectis conficiunt amplius quam bis tot rectos, quot sunt triangula. Sed iidem anguli circa basim, una cum angulis qui componunt solidum, componunt bis (*c*) tot rectos quot sunt triangula. Liqueat ergo angulos solidum angulum *A* componentes quatuor rectis esse minores. Quod erat demonstrandum.

Corol.

Corollarium.

EX hac & præcedenti satis colligitur, ex tribus angulis planis, rectis quatuor minoribus, quorum duo quilibet reliquo sint majores, solidum angulum constitui posse.

Scholium.

EX hac eadem propositione demonstratur celebre theorema. Tres tantum figuræ planæ ordinatæ, & æquales, corpus continere possunt, nimirum æquilatera triangula vel 4. vel 8. vel 20. Quadrata 6. pentagona 12. Ac proinde quinque tantum sunt ordinata, seu regularia corpora. Pyramis, quæ 4. Octaedrum quod 8. Icosædrium quod 20. æquilateris triangulis continetur; Cubus, qui 6. quadratis, Dodecaedrum quod 12. æqualibus pentagonis ordinatis comprehenditur. Porro corpus ordinatum dicetur, quod planis ordinatis & æqualibus continetur.

Demonst. Ex duobus æquilateris triangulis non potest constitui angulus solidus: ad hoc enim saltem requiruntur tres.

A tribus triangulis æquilateris in unum punctum coeuntibus, potest constitui angulus solidus pyramidis; ex quatuor, angulus solidus octædri; ex quinque, angulus solidus Icosædri; cum æquilateri trianguli anguli tum 3. tum 4. tum 5. sint 4. rectis minores, ut colligitur ex coroll. 12. p. 32. l. 1.

Quoniam vero tres anguli pentagonici (b) sunt 4. rectis (b) Colligitur ex coroll. p. 11. l. 4. minores, poterunt tria pentagona in unum punctum coeuntia constituere solidum angulum, nempe Dodecaedri.

A tribus quadratis in unum punctum coeuntibus effici solidum angulum cubi, per se patet. Atque ita quinque exsurgunt regularia corpora.

Præter hæc nulla esse alia sic ostenditur.

Sex anguli trianguli æquilateri conficiunt 4. rectos. Unus enim facit duas (c) tertias recti: ac proinde sex tales efficient (c) Per coroll. 12. p. 32. l. 1. 12. tertias recti, hoc est rectos 4. Ergo, a sex æquilateris triangulis non poterit effici solidus angulus, multo minus a pluribus.

A quatuor quadratis, non posse constitui solidum angulum, ac multo minus a pluribus per se patet.

Anguli pentagonici 4. sunt 4. rectis majores: Singuli enim efficiunt 6. quintas (d) recti. Ergo a quatuor pentagonis nequit fieri angulus solidus, multo minus a pluribus. (d) Per coroll. p. 11. l. 4.

Nec sane ex aliis figuris quibuscumque ordinatis constitui poterit solidus angulus. Tres anguli hexagonici (e) sunt 4. rectis (e) Per coroll. 2. p. 15. l. 4. æquales.

æquales. Unus enim facit 4. tertias recti, ac proinde tres faciunt 12. tertias recti, hoc est 4. rectos. Ergo ex tribus hexagonis nequit constitui solidus angulus, multo minus a pluribus.

Cum vero tres anguli hexagonici sint 4. rectis æquales; tres anguli figurarum quarumlibet hexagono majorum; ut heptagoni, octagoni, &c. 4. rectis majores erunt. Quare manifestum est reliquas figuras ordinatas, omnes esse ineptas ut solidum angulum constituent; adeoque præter jam dicta 5. nulla ordinata corpora dari posse.

PROPOSITIO XXII. XXIII.

Admodum prolixe sunt ac moleste tyronibus, & fere usu non veniunt.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 29.

Plana parallelepipedum continentia (1.) sunt parallelogramma, (2.) quæ ex adverso sunt similia & (3.) æqualia.

1. Pars. Planum AF secans plana BD, FH ex defin. 13. ^{(a) Per 16. l. 11.} parallela, facit (a) sectiones BA, FE parallelas. Rursum planum AF secans plana AH, BG per defin. 13. parallela, facit ^{(b) per eand. l. 11.} (b) sectiones AE, BF parallelas. Ergo BAEF parallelogrammum est. Simili argumento reliqua parallelepiedi plana sunt parallelogramma.

2. Pars. Quoniam ex prima parte patet AB, BC parallelas esse EF, FG, erunt (c) anguli ABC, EFG pares. Quare cum & latera alternis sunt paria, similia sunt parallelogramma adversa BD, FH. Eodem modo probatur de cæteris oppositis.

3. Pars patet ex prima parte, & 4. vel 8. 1.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 30.

Si parallelepipedum (GFDI) aut quodvis prismâ plano (NP) secetur adversis planis parallelo; erit ut basis (DCPO) ad basim (OPFE) ita solidum (GP) ad solidum (NF.)

Demonstrabitur eodem modo quo 1.6.

Corol.

Corollarium.

PRisma sectum plano adversis planis parallelo, sectionem habet similem & æqualem planis adversis.

PROPOSITIO XXVI. XXVII.

NON sunt necessaria.

PROPOSITIO XXVIII.

Planum per adversorum planorum diametros (AC , Fig. 29. EG) transiens, parallelepipedum secat in duo equalia prismata.

Quoniam (a) BG , BE sunt parallelogramma; CG , AE (a) Per 24. æquidistant eidem BF . Ergo & (b) inter se sunt parallelæ, l. 11. ac proinde in uno sunt plano. Ergo rectæ AC , EG (c) in (b) per 9. l. 11. uno sunt plano. Jam vero planum per illas ductum secare (c) per 7. l. 11. parallelepipedum in duo prismata æqualia sic ostendo. Intelligatur prisma $AEGCDH$ supra planum suum $EACG$ ita constitui, ut anguli D , H vergant ad angulos B , F . Manifestum est tum adhuc fore inter parallela plana $BADC$, $FEHG$. Tum vero necesse est ut D cadat in B , & H in F . Cadat enim D extra B si fieri potest, in N . Angulus BAC æquatur (d) angulo DCA . Sed DCA æquatur NAC , (est (d) Per 27. enim unus idemque angulus.) Ergo BAC & NAC æquales l. 1. sunt: quod est absurdum. Ergo D incidit in B ; & pari de causa H in F . Ergo prisma $AEGCDH$ congruit prismati $ACGEFB$, ac proinde (e) æqualia sunt. (e) Per au. 7.

PROPOSITIO XXIX. & XXX.

Parallelepipeda ($FEAGKIMC$ & $FEBH$ Fig. 31. $LOMD$) qua eandem habent basim ($EFIM$) & altitudinem eandem, ac proinde existunt inter parallela plana ($EFIM$, $GAOL$) æqualia sunt.

Vel enim existunt inter lateralia parallela plana $EAOM$, & $FGLI$, vel non. Esto primum. Ex 24. hujus, & 8. l. 1. Patet triangula AEB , CMO , item GFH , KIL sibi mutuo æquilatera & æquiangula esse. Quare ut in precedenti, ostendam prismata $CMOLIK$, $AEBHFG$ sibi mutuo imposita con-

* *Per axio. 7.* congruere, ac proinde * æqualia esse. Quare addito communi solido FEBHKCMI, tota parallelepipedum FEAGKIMC, FEBHLOMI æqualia erunt. Quod erat dem.

Fig. 32.

* *Per defin.*
13. l. 11.

Sit deinde parallelepipedum FXQEMIPR non inter eadem lateralia plana parallela existens cum parallelepipedo FEAGKCM I. Quoniam ex hypothese GK, AC, RP, QX sunt in uno plano ad basim EFIM parallelo; RP, QX secant GK in L & H, AC vero in O & B; junganturque EB, MO, FH, IL. Facile ostensu est plana solidum FEBHLOMI continentia parallelogramma esse ex adverso æquidistantia, adeoque solidum illud * esse parallelepipedum. Sed huic per primam partem parallelepipedum FXQEMIPR, & FEAGKCM I, sunt æqualia. Ergo etiam sunt æqualia inter se. Quod erat dem.

Scholium.

Hæc propositio similis est propositioni 35. lib. 1. affirmat enim de solidis, quod illa de planis. Quare similis etiam erit reliquorum casuum demonstratio.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 33.

Parallelepipedum super æqualibus basibus (AO & EG) & in eadem altitudine (S) sunt æqualia.

(a) *Per 25.*
l. 11.

(b) *Per 35.*
l. 1.

(c) *Per 25.*
l. 11.

(d) *Per 9. l. 5.*

(e) *Per 29.*
l. 11.

(f) *Per constr.*

(g) *Patet ex*
29 l. 11. imo
per se.

Habeant parallelepipedum primo latera ad bases normalia. Ad latus FG productum, fiat parallelogrammum GMKH æquale ac simile parallelogrammo AO: perfectoque parallelogrammo GMPR, rectæ PM, RG occurrant ipsi KH in Q & L. Jam vero intelligantur super GK, GQ, GP constitui parallelepipedum, quorum latera sint ad bases recta, altitudo autem omnium communis sit S. Solidum EGS est ad solidum GPS, ut EG (a) ad GP; hoc est (quia EG, AO per hyp. æquantur) ut AO ad GP; hoc est per constr. ut GK ad GP; hoc est ut (b) GQ ad GP; hoc est (c) ut solidum GQS est ad idem solidum GPS. Quoniam igitur solida EGS & GQS eandem habent rationem ad solidum GPS, (d) erit solidum EGS (d) æquale GQS; hoc est solido (e) GKS; hoc est (quia bases GK, AO sunt (f) æquales & similes) solido (g) AOS. Quod erat propositum. Per totum discursum solida accipiuntur recta.

Habeant deinde parallelepipedum data EGS, AOS latera ad bases EG & AO obliqua. Fiant super EG, AO parallelepipedum, quorum latera sint ad bases recta in altitudine S, hæc æqualia erunt obliquis per 29. aut 30. Quare cum parallelepipedum

peda recta per primam partem sint paria inter se, erunt & obliqua æqualia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXII.

Parallelepipedum quævis aque alta, sunt inter se Fig. 34.
ut bases.

Bases sint GO & A. Super CO fac parallelogrammum OE par ipsi A.

Super BC, OE intelligantur erigi parallelepipedum in altitudine K: hæc igitur partes erunt unius parallelepipedi BEK. Ergo * parallelepipedum OEK est ad parallelepipedum BCK, * Per 25. ut basis OE ad basim BC; hoc † est ut basis A ad basim BC. l. 11. Sed quia bases OE & A sunt æquales, parallelepipedum OEK † Per constr. & AK * æqualia sunt. Ergo etiam parallelepipedum AK * Per præc. est ad parallelepipedum BCK, * ut basis A ad basim BC. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Quod hic de parallelepipedis ostensum est, demonstrabitur in libro 12. de pyramidibus prop. 6. de quibuscumque prismatibus in corollario 1. post p. 9. de conis & cylindris prop. 11.

PROPOSITIO XXXIII.

Similia parallelepipedum (HA & CM sunt in tri- Fig. 35.
plicata ratione laterum homologorum (AB, BC).)

Sint parallelepipedum AH, CM similia. Ergo omnia ipsorum plana similia (a) sunt; adeoque AB ad BC (b) est ut (a) Per defm. EB ad BO; & ut FB ad BG, sic EB ad BO. Insuper & 9. l. 11. anguli (c) planorum æquales sunt. Collocentur sic igitur so- (b) Per defm. lida AH, CM ut æquales anguli CBO, ABE sint oppositi (c) Per eand. l. 1. l. 6. & latera AB, CB in directum; tum vero etiam (d) EB, OB (d) Per præc. in directum erunt. Cogitentur jam super planis BQ & EC 15. l. 1. facta solida, sic ut solida KB, HA sint unum parallelepipedum, & KB, PO faciant unum similiter parallelepipedum, & PO, CM unum quoque parallelepipedum conficiant. Solidum HA est ad solidum KB (e) ut AE ad BR; hoc est (e) Per 25. ut (f) AB ad BC; hoc est (ut per hyp. ostendi supra) ut l. 11. EB ad BO; hoc est ut (g) EC ad BQ; hoc est ut solidum (f) Per 1. l. 6. (g) Per eand. (h) Per 25. (h) idem KB ad solidum PO. Continuant ergo eandem rationem l. 11.

tionem tria solida HA , KB , PO . Jam vero solidum K Best
 (i) *Per eand.* ad solidum PO , ut (i) basis BR ad basim BQ ; hoc est ut
 (k) *Per 1.16.* (k) EB ad BO ; hoc est, ut (l) FB ad BG ; hoc est (m) ut
 (l) *Ostendi* planum FC ad planum BS ; hoc est, ut idem (n) rursus soli-
supra ex hyp. dum PO ad CM solidum. Quatuor ergo solida HA , KB ,
 (m) *Per 1.16.* (n) PO , CM , sunt continue proportionalia. Ergo ratio primi
 (n) *Per 25.* HA ad quartum CM est (o) triplicata rationis primi HA
 (o) *Per defin.* ad KB secundum; hoc est, rationis (p) AE ad BR ; hoc est,
 (p) *Per 25.* (q) rationis homologorum laterum AB ad BC . Quod erat
 (q) *Per 1.16.* demonstrandum.

[Corollarium. Hinc si fuerint quatuor linea recta continue
 proportionales; ut est prima ad quartam; ita est parallelepipe-
 dum super primam descriptum, ad parallelepipedum simile simi-
 literque descriptum super secundam.]

Fide schol. Coroll. (2.) Hinc etiam pendet celeberrimum illud de cubo
Post 18. l.12. duplicando Problema: de quo infra.

Coroll. (3.) Hinc etiam corrigendus est eorum error qui soli-
 dorum similium eandem ac laterum esse rationem opinantur.
 Linea enim dupla cubus non est tantum duplus, sed octuplus cubi
 alterius. Et Linea tripla cubus non est tantum triplus sed vige-
 cuplus septuplus cubi alterius. Nam $1 : 2 : 4 : 8 \div \div \div$ & $1 : 3 : 9 : 27 \div \div \div$. Et ita de corporibus quibuscunque similibus est con-
 sendum; ut indeinceps patebit.

Coroll. (4.) Hinc ratio triplicata quantitatum quarumvis,
 est ratio cuborum earundem. Sint dua quavis quantitates in
 triplicatâ ratione quantitatum AB , BC ; erunt etiam ut AB
 cub. ad BC cub. Et vice versa.]

Scholium.

Quod hic de parallelepipedis ostensum est, in libro 12. de-
 monstrabitur de pyramidibus propof. 8. de quibuscunque
 prismatibus coroll. 2. post p. 9. de conis & cylindris p. 11.
 de sphaeris p. 18.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 36.

SI parallelepipeda equalia sunt (BM , CK), recipro-
 cant bases & altitudines, (hoc est, basis AM est ad ba-
 sim FK , ut reciproce altitudo FC ad altitudinem AB .)

Et si reciprocant bases & altitudines, equalia sunt.

1. Pars. Sint primo latera ad bases recta. Si jam solido-
 rum BM , CK altitudines sint pares, res patet.

Si altitudines sint inæquales, a majori FC abscinde FE pa-
 rem BA : & per E duc planum EL ad FK parallelum. Basis
 AM

A M est ad basim FK, ut solidum (a) BM ad solidum EK; (a) Per 25. hoc est (quod ex hyp. paria sint solida BM, CK) ut solidum CK ad EK Solidum; hoc est, ut (b) CG ad EG; hoc est, ut (c) CF ad EF; hoc est ex constr. ut CF reciproce ad BA. (c) Per 1. 16. Quod erat demonst.

Sint deinde latera ad bases obliqua. Erigantur super iisdem basibus in altitudine eadem parallelepipeda recta. Erunt his obliqua (d) parallelepida æqualia. Quare cum hæc per 1. partem reciprocent bases & altitudines, etiam illa reciprocabunt. (d) per 29. 30. l. 11. Quod erat demonstrandum.

2. Pars. Sint altitudines inæquales, lateraque ad bases recta, & ex majori CF ipsi AB sume parem EF. Solidum BM est ad solidum EK, ut (e) AM ad FK; hoc est ex hyp. ut CF ad BA; hoc est ex constr. ut CF ad EF; hoc est ut CG ad EG; hoc est, ut solidum (g) CK ad solidum idem EK. Ergo solida BM & CK eandem habet rationem ad EK. Ergo sunt paria. Quod erat demonstrandum. (e) per 32. l. 11. (g) per 1. 16. (2) per 25. l. 11.

Corollaria.

QUÆ de parallelepipedis demonstrata sunt Prop. 29, 30, 31, 32, 33, 34. etiam conveniunt prismatis triangularibus, quæ sunt dimidia parallelepipeda, ut patet ex p. 28. Igitur,

1. Prismata triangularia æque alta sunt ut bases A, B. Fig. 37.
2. Si similia fuerint, eorum proportio triplicata est proportionis laterum æqualibus angulis oppositorum.
3. Si æqualia sunt, reciprocant bases & altitudines: & si reciprocant bases & altitudines, æqualia sunt.

Scholium.

Quod hic propos. 34. ostensum est de parallelepipedis, demonstrabitur in libro 12. de pyramidibus p. 9. de prismatis quibuscunque coroll. 3. post. p. 9. de conis & cylindris p. 15.

PROPOSITIO XXXV.

Valde prolixa, servit sequenti, quam sine illa demonstrabimus.

PROPOSITIO XXXVI.

Parallelepipedum (DH) ex tribus rectis proportionalibus (A, B, C) factum, æquatur parallelepipedo Fig. 38.

lepipedo (IN) factō a media (B) & equiangulo priori.

Parallelepipedī DH basis FD habeat latus EF æquale A, & latus alterum ED æquale C: latus vero EG basi insistent, æquale mediæ B. Erit parallelepipedum DH factum ex tribus rectis A, B, C. Parallelepipedī deinde IN tria latera LX, IX, XM (ac proinde omnia reliqua) sint æqualia mediæ B; & angulus solidus X sit æqualis angulo solido E. Erit parallelepipedum IN factum ex media B, & priori æquiangulum. Dico etiam esse æquale.

Cum enim per hyp. & constr. sit ut FE ad LX, ita reci-
 * per 14. l. 6. proce IX ad DE, erunt * bases DF, IL æquales. Jam quia
 † per defin. anguli solidi ad E & X sunt æquales; si ponantur intra invi-
 11. l. 11. cem, † congruent; & ob æqualitatem rectarum EG, XM,
 puncta M, G coincident. Quare una erit utriusque solidi
 altitudo perpendicularis, nempe a punctis M, G jam congru-
 * per 31. l. 11. entibus, in planum baseos demissa. Solida * igitur DH, IN
 æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Hic porro observabimus, id quod magnum habet usum, ex tribus lineis quomodocunque inter se ductis, ejusdem magnitudinis solidum gigni.

ABC. CAB. BCA.

In schemate hic apposito duæ primæ literæ designant basim; tertia altitudinem. Comparemus primum cum secundo.

Basis AB est ad basim CA per 1. 6. ut B latus ad C latus: hoc est reciproce ut B altitudo ad C altitudinem. Ergo per p. 34.

ABC. *Æ.* CAB.

Eodem modo ostendes primum tertio, & tertium secundo esse æqualia.

PROPOSITIO XXXVII.

Parallelepipeda similia, similiterque a lineis proportionalibus descripta, etiam ipsa sunt proportionalia: & e converso.

Patet ex 34. l. 5. Rationes enim parallelepipedorum per 33. hujus erunt triplicatæ rationum ex hyp. æqualium, quas habent lineæ.

Conversa patet ex 35. l. 5.

Pro-

Propositio vera est de quibuscunque similibus corporibus, quæ patebit l. 12. triplicatam habere laterum rationem.

PROPOS. XXXVIII & XXXIX.

Nihil continent memorabilia, & vix ullius sunt usus.

PROPOSITIO XL.

SI fuerint duo prismata triangularia equalis altitudinis (*ABFGOC* & *IKLPXQ*) quorum unum basim habeat parallelogrammam (*OB*) duplam baseos alterius (*IKL*) quæ triangula sunt; prismata erunt equalia. Fig. 39 & 40.

Nam si perficiantur parallelepipeda *KR* & *CM*, erunt hæc æqualia * ob basim *CA*, *MK* & altitudinum æqualitatem. ^{* per 31. l. 11.} Ergo etiam prismata ipsorum † dimidia æqualia erunt. Quod † per 28. l. 11. erat demonstrandum.

[Sunt nempe hæc duo prismata triangularia equalium parallelepipedorum per diagonales sectorum dimidia. Hoc tantum interest, quod in posteriore sectio fit per baseos diagonalem, in prior non item.]

Scholium.

EX hætenus demonstratis habetur dimensio prismatum triangularium, & quadrangularem seu parallelepipedorum, si nimirum altitudo ducatur in basim. Ut si altitudo sit 10. pedum, basis vero pedum quadratorum 100. (mensurabitur autem basis per schol. p. 36. vel 41. l. 1.) multiplicata 10. per 100. proveniunt 1000. pedes cubici pro soliditate prismatis dati.

Demonstratio facilis est. Nam quemadmodum rectangulum, ita & parallelepipedum rectum producitur ex altitudine ducta in basim. Ergo etiam quodvis parallelepipedum producitur ex altitudine in basim ducta, cum per 31. æquale sit parallelepipedo recto super eadem basi ad eandem altitudinem constituto.

Deinde cum totum parallelepipedum producat ex altitudine in totam basim; semissis parallelepipedi (hoc est prismæ triangulare per 28.) producet ex altitudine ducta in dimidiam basim, triangulum nempe *ILK*.

M

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER DUODECIMUS.

NOBIS OCTAVUS.

Quod in libris præcedentibus hætenus præstare conati sumus, ut Mathematicum elementa ad faciliorem ac breviorum methodum revocaremus; id imprimis præstandum erit in hoc libro duodecimo, cujus doctrina cum maxime sit necessaria, demonstrationes adeo sunt prolizæ, ut tyrones in desperationem plerumque conjiciant. Huic incommodo ita mederi propositum nobis est; ut tamen a rigore Geometricæ demonstrationis non recedamus. Quod utrum finis assecuti, lector intelliget, si hæc nostra cum Euclideâ prolixitate contulerit.

Postquam vero Euclides libro priore solidorum elementa exposuisset, & corporum facillimorum, utpote superficierum planis terminatorum, mensuras definivisset; In Duodecimo hoc libro corpora superficierum curvis terminata, Cylindros nimirum, Conos atque Sphæras considerat: ea inter se comparat: & eorum mensuras definit. Utilissimus sane est hic liber; eo quod principia illa contineat quibus tot celeberrimas demonstrationes de Cylindro, Cono atque Sphæra Geometricarum Principes, præsertim vero Archimedes, inadificarunt.

DEFINITIONES.

Fig. 1. Tab. 12. 1. **P**Yramis est solidum (ZL) triangulis (ALC, CLF, FLB, BLA) comprehensum, ab uno plano (Z) ad unum punctum (L) constitutis.

Planum Z basis dicitur, & esse potest vel triangulum, vel quadrangulum, vel quævis alia figura: ex cujus lateribus singulis triangula surgunt, in unum punctum L, quod vertex dicitur, coeuntibus.

Ut triangulum inter rectilineas figuras planas, ita pyramis inter solidas prima & simplicissima est.

Fig. 2. 3.

2. Si extra planum alicujus circuli (CL) acceptum fuerit punctum (A) ab eoque ducatur recta infinita (AF) tangens circu-

circulum in C; quæ puncto (A) manente fixo, circa peripheriam circuli convertatur, donec in eum locum (ACF) redeat, unde moveri coeperat; superficies a recta linea (ACF) descripta, dicitur conica superficies, corpus vero quod hac superficie & circulo (CL) continetur, conus vocatur.

Vertex conici est A.

Basis conici est circulus CL.

Axis conici est recta (AB) ex vertice ad bascos centrum ducta.

Latus conici est recta (AC) a vertice ad bascos circumferentiam ducta, quam esse totam in conici superficie, ex ejus generesi est manifestum.

Conus rectus est, cum axis (AB) est basi rectus.

Conus scalenus, seu obliquus est, cum axis (AB) non est ab basi rectus.

Fit etiam conus rectus a triangulo rectangulo (CBA) circa unum latus perpendiculare (AB) in orbem ducto. Vide Fig. 2.

3. Si circa duos circulos æquales & parallelos (CL, OQ) recta linea infinita (COF) convertatur, donec in locum redeat, unde moveri coepit, sic ut mota sibi ipsi semper parallela maneat; superficies a recta (COF) descripta dicitur cylindrica superficies: corpus vero quod hac superficie & binis circulis continetur, cylindrus vocatur.

Bases cylindri sunt circuli (CL, OQ).

Axis cylindri est recta (AB) basium centra connectens.

Latus cylindri est recta (OC) in cylindri superficie utramque basim tangens.

Rectus cylindrus est cum axis ad bases rectus est.

Scalenus cylindrus dicitur, cum axis ad bases non est rectus.

Fit etiam cylindrus rectus a rectangulo (OCBA) circa unum latus (BA) in orbem ducto. Vide Fig. 4.

4. Similes conici & cylindri sunt, quorum axes (AK, ZO) & basium diametri (BF, QR) sunt proportionales.

5. Sphæra est solidum comprehensum una superficie, ad quam omnes rectæ lineæ a quodam puncto intra ipsam posito ductæ, sunt æquales.

Punctum illud centrum dicitur.

Sphærae diameter est recta per centrum ducta ad superficiem utrinque pertingens.

Generatur sphæra si semicirculus circa diametrum (AF) immotam convertatur.

6. Magnitudines figuræ alicui inscriptæ, aut circumscriptæ, sive figura minores vel majores, in figuram desinere dicuntur, cum ab ea tandem differre possunt quantitate minori quacunque data, seu quantumvis parva.

Itaque si ea, quæ figuræ alicui inscribuntur, ab ea tandem deficient defectu minori quocunque dato, inscripta dicentur in figuram definere: Et si ea quæ alicui figuræ circumscribuntur, excedant eam tandem excessu minori quocunque dato, dicentur, rursus circumscripta definere in figuram.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 6 & 7. Polygonorum similium circulo inscriptorum proportio est duplicata proportionis diametrorum (AF, IC.)

Ducantur AO, BF; IR, LC. Quia polygona ponuntur similia, æquales erunt (a) anguli OBA, RLI, & latera OB, BA, proportionalia lateribus RL, LI. Ergo in triangulis OAB, RIL, (b) anguli O & R æquantur. Ergo etiam BFA & LCI, qui iisdem arcubus BA, LI insistant, sunt (c) æquales. Anguli vero FBA, CLI in semicirculis sunt (d) recti, ac proinde æquales. Ergo reliqui BAF, LIC (e) æquantur. Quoniam igitur triangula FAB, CIL sibi mutuo æquiangula sunt, erunt (f) similia; eritque BA ad LI, ut AF ad IC. Jam quia per hyp. polygona sunt similia, erit proportio eorum duplicata (g) proportionis laterum BA, LI; hoc est, ut jam ostendi, duplicata proportionis diametrorum AF, IC. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Fig. 6 & 7. Polygonorum similium circulo inscriptorum ambitus sunt inter se ut diametri.

Cum ostensum jam sit AB esse ad LI, ut AF ad IC; etiam OB erit ad RL, ut AF ad IC: & sic de cæteris lateribus. Ergo per 12. 5. omnia simul latera, ad simul omnia, hoc est, ambitus ad ambitum sunt ut AF ad IC.

Lemma

Fig. 8.

Polygona circulo inscripta in circulum definunt:

Inscribe quadratum ACBD. Cum hoc dimidium sit quadrati * circulo conscripti, erit majus dimidio circuli. Quare si hoc auferatur è circulo, auferetur plus quam dimidium. Deinde singulis arcibus bisectis in E, K, I, H, inscribe octogonum: & in E tangat FG, cui BC, DA occurrant in G & F: erit CF parallelogrammum, cujus cum dimidium sit triangulum †CEA, erit hoc plus quam dimidium segmenti

* Per Schol. post 6. & 7. l. 4.

† Per 41. l. 1.

menti CEA. Eodem modo singula triangula AKD, DIB, &c. singulorum segmentorum plus sunt quam dimidia. Ergo omnia triangula omnium segmentorum plus quam dimidia sunt. Hæc ergo si ex illis, hoc est, ex residuo circuli auferas, plus quam dimidum auferetur. Pari argumento si inscribantur circulo polygona duplo semper plurium laterum, ostendam è residuo circuli semper auferri plus quam dimidum. Ergo residuum erit tandem * minus quocunque dato, * *Pates en lem. 2.* ac proinde polygona inscripta tandem a circulo deficient quantitate minori data quacunque, hoc est, in circulum † *Schol. post. 11. l. 6.* definient. Quod erat demonstrandum. † *per defin. 6. l. 12.*

PROPOSITIO II.

Circulorum proportio est duplicata proportionis diametrorum. *Fig. 6. & 7.*

Polygonorum similium circulo sine fine inscriptorum proportio semper duplicata * est proportionis diametrorum. At * *per 1. l. 12.* qui polygona circulo in infinitum inscripta, in circulum †† *per lem.* definunt. Ergo per porisma universale sequens, etiam circulorum proportio duplicata est proportionis diametrorum. Quod erat demonstrandum.

Porisma universale.

SI ea quæ duabus figuris (A, B) inscribuntur, in ipsas definant, quam proportionem inter se semper habent inscripta, eandem habent & figuræ.

R. Sit ratio X ad Z, ea quam inscripta semper habent inter se. Si ergo negas rationem figurarum A, B eandem esse cum ratione X ad Z, quam semper habent ea, quæ figuris inscribuntur, sit ratio A ad B primo major ratione X ad Z. Ergo alia quædam quantitas R minor quam figura A, erit ad figuram B, ut X ad Z. Quoniam inscripta per hyp. definunt in figuras A & B, erunt aliqua figuris A & B inscripta, quæ ab ipsis deficient (a) minori quantitate, quam R deficiat a(a) *Per defin. figura A. Sint ea, C & F. Ergo C erit majus quam R. Ergo 6. l. 12.* C est ad B in (b) majori, quam R ad B; hoc est (ut poneba- (b) *per 8. l. 5.* tur) quam X ad Z; hoc est per hyp. quam idem C ad F. Quoniam igitur C est ad B in majori proportionem, quam ad F, erit B figura minor (c) sibi inscripto F, totum sua parte. Eodem (c) *per 10. l. 5.* modo ostendetur rationem B ad A non posse esse majorem ratione Z ad X. Ergo ratio A ad B æqualis est rationi X ad Z. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III & IV.

Sunt prolixæ & difficiles tyronibus, nec aliam habent usum, quam ut per eas demonstretur quinta, quam nos sine illis multo facilius demonstrabimus.

Lemmata ad P. 5.

I.

Fig. 9.

SI duæ pyramides triangulares secantur planis (OSE, RXZ) ad bases (ABC, IQV) parallelis, quæ dividant latera (CF, QL) proportionaliter (in E & Z:) erunt (OSE, RXZ) inter se ut bases (ACB, IQV.)

- Quoniam parallela plana OSE, ABC secantur a planis BFC, AFB, AFC, erunt sectiones communes SE, BC, & OS, AB, & OE, AC (a) parallelæ. Ergo anguli OSE, ABC, & SOE, BAC, & OES, ACB, bini & bini, æquales (b) sunt. Quare sectiones OSE, ABC (c) sunt similes. Eodem modo similes esse ostendam sectiones RXZ, IVQ. Ergo ratio sectionis ABC ad OSE est duplicata (d) rationis laterum BC ad SE, & ratio sectionis IVQ ad RXZ duplicata est rationis VQ ad XZ. Atqui rationes BC ad SE, & VQ ad XZ sunt eadem: (est enim BC ad SE, ut (e) CF ad EF; hoc est per hyp. ut QL ad ZL; hoc (f) est ut VQ ad XZ.) Ergo ratio ABC ad OSE eadem est (g) cum ratione IVQ ad RXZ. Quod erat propositum.
- (a) per 16. l. 11.
(b) per 10. l. 11.
(c) per 4. l. 6.
(d) per 19. l. 6.
(e) per corol. 1. p. 4. l. 6.
(f) per idem corol.
(g) per 35. l. 5.

II.

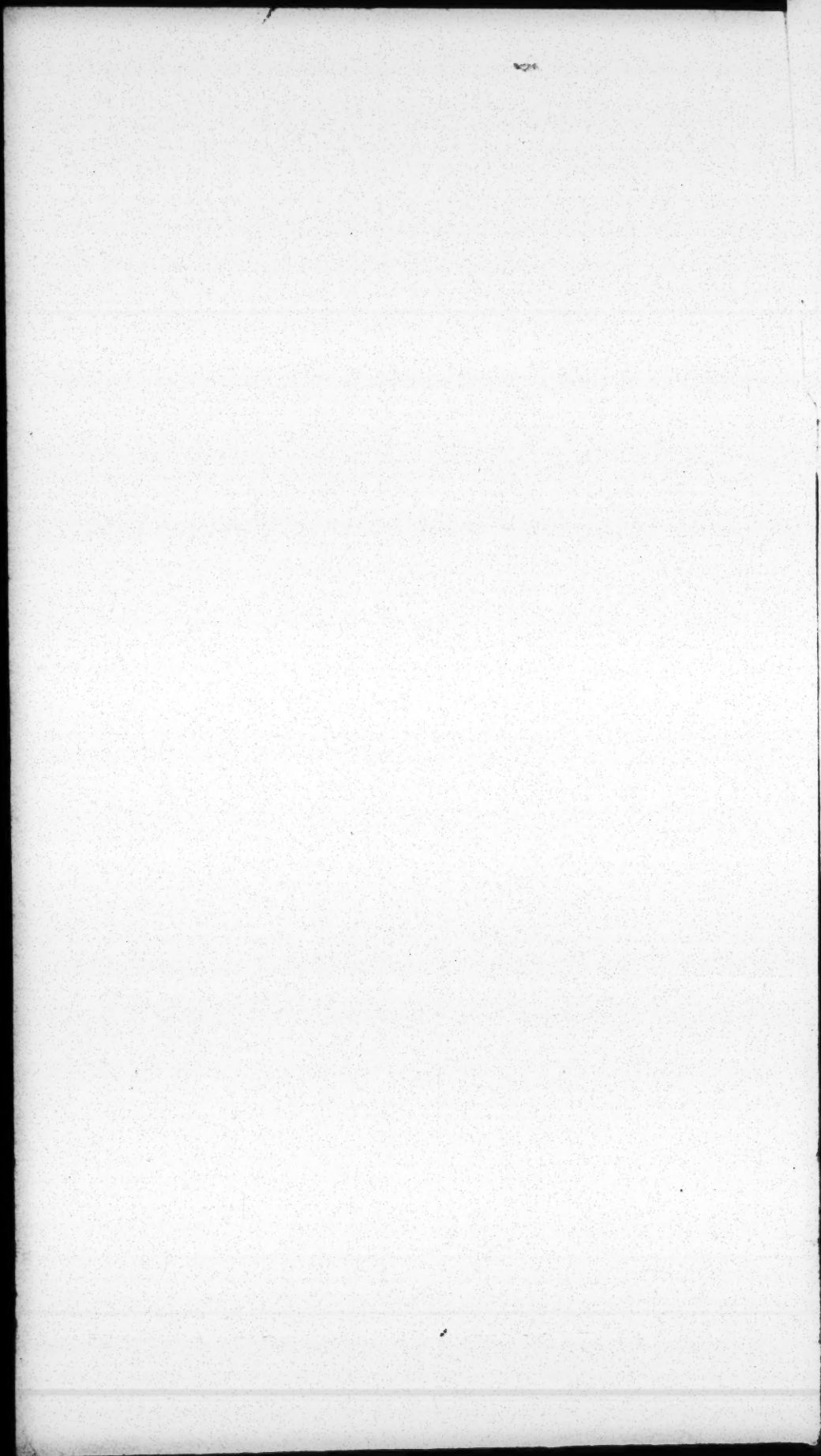
Fig. 10.

PYRAMIDI (ZCAF) triangulam habenti basim, prismata in infinitum inscripta, desinunt in ipsam pyramidem.

Dividatur latus pyramidis in aliquot æquales partes AB, BG, GF, & per B, G factis sectionibus GDN & BEP basi ZAC parallelis, inscripta intelligantur pyramidi prismata triangulæ BEPMAO, & GDNKBQ. His deinde extra pyramidem continuatis, intelligantur pyramidi esse circumscripta prismata CIBA, PXGB, NHFG. Excessus circumscriptorum supra inscripta sunt solida IM, XK, HQ, quæ simul sumpta æquantur prismati CIBA: nam HG est (a) æquale

- DB, ac proinde HG cum XK æquatur PXGB, hoc est (b) MEBA. Ergo tria HG, XK, IM æquantur toti CIBA. Atqui si AF in plures sine fine partes æquales dividatur, ac proinde prismaticum numerus in infinitum multiplicetur, AB fiet (c) quavis data minor. Ergo etiam (d) prisma CIBA fiet
- (a) per 25. l. 11.
(b) per eand. l. 11.
(c) Collig. ex lem. 2. Schol. post 11. l. 6.
(d) patet ex 35. l. 11.

fiet



fiet quovis dato minus. Ergo prismatum circumscriptorum (multoque magis pyramidis $ZCAF$, quæ pars est prismatum sibi circumscriptorum) excessus supra inscripta prismata, fiet quovis dato minor. Ergo inscripta prismata in pyramidem
* tandem desinunt. Quod erat demonstrandum.

* per defn.
6. l. 12.

PROPOSITIO V.

Piramides triangulares æque alta eam inter se propor- Fig. 11.
tionem habent quam bases (AQR , ESX .)

Pyramidum altitudines æquales referant latera AP , EZ , quibus in quot placuerit æquales partes, sed æque multas, utrimque divisas, factisque per divisionum puncta sectionibus ad bases parallelis, intelligantur utrique pyramidi inscripta esse prismata trigona æque multa & æque alta. Jam vero quia prismata LA , IE sunt æque alta, erit prisma LA ad prisma IE , ut (a) basis LOB ad basim INK ; hoc est, (b) ut basis QRA ad basim SXE . Eodem modo ostendam singula prismata pyramidi $QPAR$ inscripta, esse ad singula inscripta pyramidi $SZEX$, ut basis QAR ad basim SEX . Ergo etiam (c) simul omnia sunt ad omnia, ut basis ad basim. Quare cum ea tandem desinant (d) in ipsas pyramides, etiam ipsæ erunt (e) ut bases. Quod erat demonstrandum.

(a) Per corol.
1. p. 34. l. 11.
(b) per lem. 1.
(c) per 12. l. 5.
(d) per lem. 2.
(e) per porif.
univers.
post p. 2. l. 12.

PROPOSITIO VI.

Piramides quacunque æque alta, eam inter se ratio- Fig. 12 &
nem habent quam bases (AB , CFO .) 13.

Resolvantur bases in triangu-
la A, B, C, F, O ; pyramides vero totæ in pyramides triangulares. Pyramis AX est ad pyramidem OZ , ut (a) A ad O ; & pyramis (b) BX est ad pyramidem OZ ut B ad O . Ergo pyramides simul AX , BX (hoc est, tota ABX) sunt ad pyramidem OZ , ut A, B (c) simul ad O . Eodem discursu pyramis ABX est ad pyramidem FZ , ut (d) A, B est ad F : Et ABX est ad CZ , ut (e) A, B est ad C . Ergo ABX (f) est ad tres simul OZ , FZ , CZ , hoc est ad totam pyramidem $OFCZ$, ut A, B ad O, F, C . Quod erat demonstrandum.

(a) per prac.
(b) per cand.
(c) Per 24.
l. 5.
(d) Per prac.
(e) 24. l. 5.
(f) Per casu.
l. 5.

PROPOSITIO VII.

Omnis pyramis tertia pars est prismatis habentis eandem basim & altitudinem.

Fig. 14. Sit primo pyramis trigona BGAC, in eadem basi & altitudine cum prisma BACFEO: ducantur BF, AO, AF, (a) Per 34. la. Triangula BFC, BFO sunt (a) paria. Ergo pyramis BFCA (b) Per 5. la. pyramidi BOFA (b) æqualis est. Ob eandem causam pyramis OEAF par est pyramidi OBAF, hoc est pyramidi BOFA, sunt enim eadem pyramides. Igitur etiam BFCA, & OEAF æquales sunt. Omnes igitur tres BFCA, OEAF, OBAF, five BOFA sunt pares. Ergo tres simul unius BFCA triplæ sunt. Atqui tres illæ constituunt prisma BACFEO. Illud ergo pyramidis BFCA, hoc est (c) BGAC, triplum est. Quod erat demonstrandum.

Fig. 15. Sit deinde pyramis quævis eandem habens basim & altitudinem cum prisma AEFH: ductis lineis BC, BO, BE, & NI, NG, NH, resolve prisma in triangularia prismata, & pyramidem in trigonas pyramides. Quo facto patet demonstratio ex prima parte. Nam singulæ partes prismatis tripla erunt singularum partium pyramidis. Ac proinde totum prisma totius pyramidis triplum est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 16. Similium pyramidum (OACB, KHIN) proportio est triplicata ejus, quam habent homologa latera (AB, HN.)

Sint primo trigonæ: perfectis parallelogrammis AM & HQ, super his constitue parallelepipedæ AG, HL, in altitudine pyramidum; quæ cum pyramides sint similes, etiam patet similia (a) esse. Ducantur jam EF, RP, & per EF, CB, item per RP, IN secabuntur (b) parallelepipedæ in duo prismata æqualia: singula horum (c) tripla sunt pyramidum OACB, & KHIN. Utraque ergo simul, hoc est tota parallelepipedæ AG, HL, sextupla sunt pyramidum. Pyramides ergo parallelepipedis proportionales sunt. Sed horum ratio (d) triplicata est rationis laterum AB, HN. Ergo & illarum. Quod erat demonstrandum.

Fig. 17. Quod si pyramides similes fuerint polygonæ, resolvantur in (a) Ex 20. & triangulares AR, BR, CR, & OK, EK, FK. Facile (e) 5. l. 6. & ex ostendes etiam AR ipsi OK, & BR ipsi EK, & CR ipsi FK defin. 9. l. 11. esse similes. Ergo per 1. partem ratio pyramidum AR, OK est triplicata rationis IM ad PZ: & ratio pyramidum BR & EK triplicata est rationis MX ad SZ; hoc est denuo per hyp. rationis IM ad PZ: & ratio pyramidum CR, FK est triplicata rationis XQ ad ST, hoc est, rursus IM ad PZ. Cum ergo ratio singularum ad singulas sit triplicata rationis IM ad PZ,

PZ, etiam ratio * omnium ad omnes (hoc est ratio totius * per 12. l. 3. pyramidis ABCR ad totam OEFK) triplicata erit rationis IM ad PZ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

Æ Quales pyramides reciprocant bases & altitudines: & quæ reciprocant, sunt æquales. Fig. 18. 19.

1. Pars. Sint primo pyramides trigonæ BACO, HKNL: perfectis parallelogrammis BE, HR, super his sint parallelepipedæ BF, HP. Erant (ut ostendimus in 8.) pyramidum ex hyp. æqualium sextupla, ac proinde æqualia inter se. Sunt vero horum parallelepipedorum altitudines HK, BA eadem quæ pyramidum: bases vero BE, HR duplæ * sunt basium pyramidalium BCO, HNL, ac proinde iis proportionales. Cum igitur ob parallelepipedorum æqualitatem, sit ut BE ad HR, ita † reciproce HK ad BA; etiam erit ut basis BCO ad basim HNL, ita reciproce altitudo HK ad altitudinem BA. Quod erat demonstrandum.

Quod si pyramides habeant bases polygonas, retentis iisdem altitudinibus reducantur ad trigonas, eruntque hæc illis æquales per 6. Sed pyramides sic reductæ per jam demonstrata reciprocant bases & altitudines. Ergo etiam pyramides datæ polygonæ reciprocant bases & altitudines. Quod erat demonstrandum.

2. Pars. Quoniam jam ponitur esse BCO ad HNL, ut HK ad BA; erit quoque BE ad HR, ut HK ad BA. Ergo parallelepipedæ BF, HP * sunt æqualia. Ergo & sextæ eorum partes, nempe pyramides BACO, HKNL. Quod erat demonstrandum.

Corollaria.

QUæ de pyramidibus demonstrata sunt p. 6. 8. 9. etiam conveniunt quibuscunque prismatis; cum hæc tripla † sint † per 7. l. 12. pyramidum eandem basim & altitudinem habentium. Igitur

1. Prismaticum æque altorum eadem est proportio quæ basium. Id enim ostensum est de pyramidibus p. 6.

2. Similium prismaticum proportio est triplicata proportionis homologorum laterum. Id enim ostensum est de pyramid. p. 8.

3. Æqualia prismata reciprocant bases & altitudines: & quæ reciprocant, sunt æqualia. Id enim de pyramidibus ostenditur p. 9.

Mirum

Mirum est hæc ab Euclide prætermiffa, cum præcipua fint, quæ de solidis rectilineis tradi possunt.

Scholium.

EX hæcenus demonstratis elicietur dimensio quorumcunque prismatum ac pyramidum.

Prismatis soliditas producit ex altitudine in basim ducta, pyramidis vero ex tertia altitudinis parte ducta in basim.

Ut si prismatis altitudo sit 5. pedum, basim vero 25. pedum quadratorum; multiplica 25. per 5. proveniunt 125. pedes cubici pro soliditate prismatis.

Fig. 15. Est enim prisma polygonum AH. Ejus basi AE intelligatur æquale esse triangulum BAC, superque eo prisma BE æque altum ac AH. Erunt (a) BE, AH æqualia prismata. Sed BE prisma (b) producit ex altitudine sua in basim BAC, hoc est (c) AE. Ergo etiam prisma AH fit ex altitudine sua, quæ altitudini prismatis BE æqualis ponitur, in basim AE. Hinc vero & ex 7. patet demonstratio partis secundæ.

Lemma ad P. 10.

PYRAMIDES & prismata, quæ conis & cylindris in infinitum inscribuntur, in conos & cylindros desinunt.

Demonstratur ut lemma propositionis 2. adminiculo propositionis 6. & corollarii 1. post p. 9. si ut istic plana circulo inscripta, ita hic pyramides & prismata, quæ super planis illis tanquam basibus consistunt, a cono & cylindro auferantur.

PROPOSITIO X.

OMNIS conus tertia pars est cylindri eandem basim & altitudinem habentis.

Fig. 20. Basi OL intelligatur inscribi polygonum regulare quocunque laterum, & super illo tanquam basi, cono quidem pyramis, cylindro autem prisma inscribi. Erit pyramis (a) tertia pars prismatis. Et si rursum inscribatur circulo polygonum laterum duplo plurimum, superque eo inscribatur cono pyramis, & cylindro prisma; iterum erit pyramis tertia pars prismatis; Atque hoc semper eveniet. Quare cum pyramides in conum, (e) prisma in cylindrum desinant, etiam (f) conus tertia pars cylindri erit. Quod erat demonstr.

PRO-

a firt,

ncun-

ducta,

edum

pedes

ntelli-

a BE

mata.

AC,

e sua,

E.

e.

itum

pro-

culo

lanis

ntur.

que

que

mi,

pari

late-

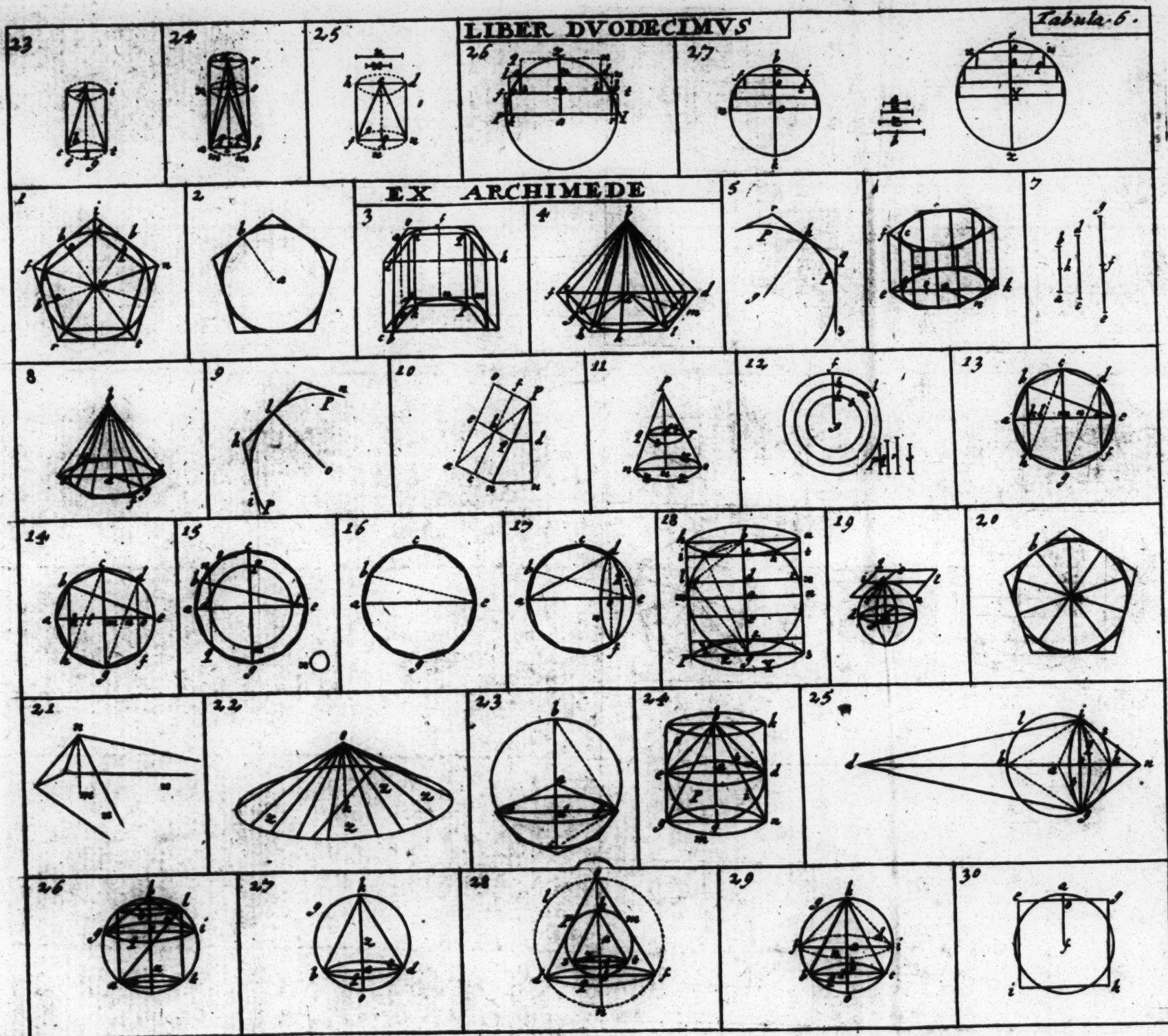
s, &

ntis;

um,

ertia

O-



Acqu
(a)
cum
ipfi e

E
cylind
cunq
bases
conic

Q.R.
accia
Si

**PRO-
Script
Ergo**

Q1

1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 26

S

C
Py
Atque
(a) ce
cum
ipfi e

E
cylind
cinq
bases
conic

C
Q R
acci
Si
proh
scrip
Ergo
al,
C
Q R
II

S

PROPOSITIO XL

Conorum æque altorum (BAF , QXR) proportio Fig. 20 & 21.
 eadem est qua basium (CL , SE). Idem acci-
 dit cylindris æque altis.

Pyramides conis æque altis inscriptæ, sunt (a) ut bases. (a) Per 6. L. 12.
 Atque (b) pyramides tandem in conos desinunt. Ergo etiam (b) Per lem.
 (c) conis sunt ut bases. Cum vero cylindri conorum eandem ante 10.
 cum ipsis basium & altitudinem habeantium sint tripli, etiam L. 12.
 ipsi erunt ut bases. Quod erat demonstrandum. (c) Per peris.
 ante 10.

Corollarium.

Eodem modo demonstrabitur etiam prismata & cylindros
 æque alta esse inter se ut bases, imo qualibet corpora
 cylindriciformia æque alta, hoc est, quæ producuntur ex quibus-
 cunque planis in eandem altitudinem ductis, esse inter se ut
 bases. Eodem modo de pyramidibus & conis æque altis, &
 conicis quibuscunque ratiocinare.

PROPOSITIO XII.

Conorum similium (BAF & QZR) proportio Fig. 20 & 21.
 est triplicata proportionis diametrorum (BF & QR)
 quæ sunt in basibus. Idem cylindris similibus
 accidet.

Similium conorum basibus inscribere polygona ordinata, quæ
 inde similia erunt. Pyramides super his polygonis in-
 scriptæ, conis etiam similes sunt; quod facile ostenditur.
 Ergo earum proportio est triplicata (a) proportionis laterum (a) Per 8. L. 12.
 BL , QE ; hoc est (b) proportionis diametrorum BF , QR . (b) Est de-
 Quare cum pyramides (c) in conos desinant, etiam conorum monst. in 1.
 proportio (d) est triplicata proportionis diametrorum BF , QR . L. 12.
 Quod erat demonstrandum. (c) Per lem.
 De cylindris patet theorema cum sint tripli conorum. ante 10.
 L. 12.
 (d) Per peris.
 ante 10.

PROPOSITIO XIII.

Si cylindrus (BI) secetur plano (RL) basi-
 bus (BQ , CI) parallelo; erit pars (BL) ad par-
 tem

Fig. 22.

1570

tem (RI) ut axis segmentum (AO) ad segmen-
tum axis (OF.)

Demonstratur ut prima sexti

Theorema eodem modo verum est de superficie.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 23. &
24.

Cylindri (AR & CI) basibus (MQ, GH)
aqualibus, sunt inter se ut altitudines (LZ,
SF.) Idem conis accidit.

Abscinde ab altiori cylindro AR cylindrum AO, altitudi-
(a) Per 11. nis LE ejusdem cum SF. Igitur cylindri AO, CI (a) æ-
l. 12. quales sunt. Cum igitur cylindrus AO sit ad cylindrum AR,
(b) per præc. ut (b) LE ad LZ etiam CI erit ad AR, ut LE ad LZ;
(c) per const. hoc est (quia LE & SF (c) æquantur) ut SF ad LZ. Quod
erat demonstrandum.

Corollarium.

Theorema etiam verum est de prismatis, itemque de py-
ramidibus, & demonstratio plane similis. Sed de pris-
matis ex corol. 1. p. 9. l. 12. & 25. l. 11. ejusque coroll. De
pyramidibus ex hoc, & ex 7. l. 12.

PROPOSITIO XV.

Fig. 24. &
25.

Æquales cylindri (AR, DF) reciprocant ba-
ses & altitudines; & si reciprocant, æquales
sunt. Idem conis accidit.

Demonstratur ut P. 34. l. 11. sed pro 32. & 25. isthic ci-
tatis, hic adhibebitur prop. 11. & 13. lib. 12.

Scholium.

CUM nihil attulerit Euclides de ratione composita in cor-
poribus, eam breviter hoc loco demonstrabimus.

1. Cylindrus ad cylindrum, & prisma ad prisma, rationem
habent compositam ex rationibus basium & altitudinum.

Fig. 25. &
24.

Sunt cylindri FD & AR. Ab altiori AR (nam in æque
altis res per se patet) abscinde AO æque altum ac FD. Sit
etiam ut basis UT ad basim MQ, ita PN ad X; & ut alti-
tudo ND seu BO ad altitudinem BR, ita X ad Z. Opor-
tet

tet igitur ostendere, cylindrum FD esse ad cylindrum AR, ut FN est ad Z. Cylindrus FD est ad cylindrum AO, ut (a) basis VT ad basim MQ; hoc est (b) ut FN ad X: cylindrus autem AO est ad cylindrum AR, ut (c) BO ad BR; hoc est ut (d) X ad Z. Igitur ex (e) æquo cylindrus FD est ad cylindrum AR, ut FN ad Z.

De prismatis res eodem modo demonstrabitur, sed ex collario 1. p. 9. & coroll. p. 14.

2. Etiam conus ad conum & pyramis ad pyramidem rationem habent compositam ex rationibus basis ad basim, & altitudinis ad altitudinem.

Sunt enim (f) cylindrorum ac prismatum partes tertiæ.

PROPOSITIO XVI, XVII.

HÆ propositiones omnium prolixissima non alium usum habent, quam ut demonstretur P. 18. quam nos alia faciliori via demonstrabimus.

Lemma ad P. 18.

Cylindri hemisphærio inscripti in hemisphærium desinunt. Sit PZY maximus hemisphærii semicirculus: sitque radius AZ perpendicularis diametro PY. Seca AZ in aliquot æquales partes AM, MN, NZ; ductisque per divisionum puncta M, N, perpendicularibus, &c. Inscribebantur semicirculo rectangula OBRK, EDHS, quibus deinde extra circum continuatis, semicirculo circumscripta intelligantur rectangula FTYP, LVBO, QXDE. Eruntque omnia æque alta, excessus autem circumscriptorum supra inscripta sunt plana FK, LS, XE, VH, TR, quæ simul sumpta conficiunt rectangulam FTYP: Nam quia XE æquatur DS, erunt LS, VH, XE simul, æqualia rectangulo LB, hoc est OR. Quare si adjicias utrimque plana FK, TR, erunt simul omnia FK, LS, XE, VH, TR æqualia rectangulo FTYP. Si jam intelligatur semicirculus cum rectangulis circa radium immotum AZ circumagi, inscripta rectangula EH, OR producent cylindros hemisphærio inscriptos; & rectangula circumscripta producent cylindros hemisphærio circumscriptos, sibi mutuo insistentes; & sicut rectangulorum circumscriptorum excessus supra inscripta rectangula erat rectangulum FY, ita etiam cylindrorum circumscriptorum excessus supra inscriptos erit cylindrus a rectangulo FY genitus. Atqui hujus cylindri altitudo fiet quavis data minor; adeoque etiam ipse quovis dato evadet minor, si radio in plures sine

(a) Per 11.
l. 12.
(b) Per 11.
(c) Per 13. l. 12.
(d) Per 13. l. 12.
(e) Per 22.
l. 5.

(f) Per 10.
& 7. l. 12.

Fig. 26.

* Patet ex
13. l. 12.
fine

fine partes diviso, rectangulorum, indeque & cylindrorum numerus sine fine multiplicetur. Ergo cylindrorum circumscriptorum, multoque magis ipsius hemisphaerii, quod cylindrorum circumscriptorum pars est, excessus supra inscriptos cylindros fiet tandem quovis dato minor. Ergo cylindri hemisphaerio in infinitum inscripti tandem desinunt * in hemisphaerium. Quod erat demonstrandum.

* per defin.
6. l. 12.

Corollarium.

Eodem modo demonstrabitur cylindros cono, conoidi, sphaeroidi, &c. inscriptos in ipsa desinere.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 27.

Sphaerarum proportio est triplicata proportionis diametrorum (BK, RZ.)

Radiis AB, YR in quot placuerit aequales partes, sed aequae multas, divisas, ductisque per divisionum puncta perpendicularibus, &c. Intelligantur maximis sphaerarum semicirculis inscripta esse rectangula aequae multa, quae circa radios immortos AB, YR circumscripta, inscribantur utrique hemisphaerio cylindros aequae multos, sibi invicem insistentes. Quia KC (a) est ad CF, ut CF ad CB. Erit ratio KC ad CB duplicata: (b) rationis KC ad CF, hoc est rationis FC ad CB. Similiter erit ratio ZE ad ER, duplicata rationis XE ad ER. Sed per constr. est KC ad CB, ut ZE ad ER. Ergo etiam (c) FC est ad BC, ut XE ad ER. Sed BC est ad CO per constr. ut RE ad ES. Igitur ex aequo (d) FC est ad CO, ut XE ad ES. Cylindri igitur (e) FL, XQ similes sunt, ac proinde eorum proportio est triplicata (f) proportionis diametrorum FI, XV, seu semidiametrorum FC, XE, quae sunt in basibus. Sed proportio FC ad XE eadem est cum proportione quae est inter diametros sphaerarum BK, RZ; (nam ut jam ostendi, FC est ad XE, ut CO ad ES, hoc est ut BK ad RZ, ipsarum CO, ES per constr. aequae multiplices.) Ergo ratio cylindrorum FL, XQ est triplicata rationis diametrorum BK, RZ. Eodem modo demonstrabimus singulos cylindros hemisphaerio uni inscriptos, ad cylindros singulos inscriptos alteri hemisphaerio rationem habere triplicatam rationis diametrorum BK, RZ. Ergo etiam ratio simul omnium ad omnes simul (g) triplicata est rationis diametrorum BK, RZ. Quare cum aggregata cylindrorum tandem in hemisphaeria (h) desinant, hemisphaeriorum quoque, ac proinde & sphaerarum ratio triplicata erit (i) rationis diametrorum. Quod erat demonstrandum.

(g) Per 12.
l. 5.

(h) Per lem.
praced.

(i) Per Porism.
superf.

Corolla-

Corollarium.

NOta igitur proportione diametrorum, etiam sphaerarum proportio innotescit. Ut si minoris diameter sit unius pedis, majoris 10. continuetur ratio 1 ad 10 per quatuor terminos, 1. 10. 100. 1000. ut 1. ad 1000. quantum terminum, ita sphaera minor ad majorem.

Conorum, Cylindrorum & Sphaerae dimensio dabitur libro seq. ex Archimede.

Scholium.

Quemadmodum similes planae figurae per mediam proportionalem unam, ita corpora similia non nisi per medias duas, in proportionem data augentur vel diminuuntur.

Data sit sphaera vel cubus, vel aliud corpus quodcunque, cujus radius sive latus sit A. Data item sit proportio quaecunque A ad B ut dupla. Oporteat exhibere corpus & duplum dati, & simile.

Inter terminos rationis datae A & B; inveniantur duae mediae proportionales X, Z ut docuimus in scholio post 13. l. 6. Sphaera cujus radius est X, sive corpus dato simile, factum super latere X, erit duplum dati.

Nam corpora similia quorum radii seu latera sunt A & X, rationem inter se habent triplicatam * rationis A ad X, hoc est, eandem + quam A habet ad B.

Atque hoc est celebratissimum illud problema, quod Deliacum a Deliaci Apolline dictum est, quod is lue seivissima Athenas populante consultus respondisset, pestem cessaturam, si ejus ara, quae cubica erat, duplicaretur. Ita Valerius Maximus l. 8.



ANDRÆ
TACQUET

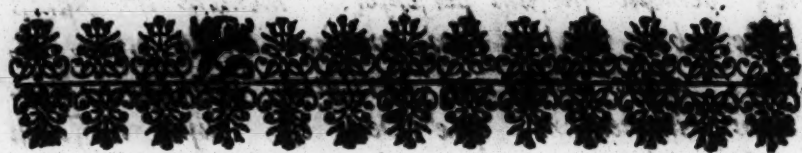
E SOCIETATE JESU
SELECTA EX

ARCHIMEDÆ THEOREMATA.

*Via faciliore ac breviori demonstrata, &
novis inventis aucta.*



i
 p
 e
 t
 l
 t
 a
 m
 S
 l
 u
 m
 m
 p
 d
 m
 p
 q
 s
 p
 q
 E



LECTORI.

Quamvis in Mathematicis disciplinis complures summi & admirabiles viri extiterunt: prima tamen gloria, communi quodam consensu, Archimedi Syracusano delata est. Sed illum plures laudant, quam legant; admirantur plures, quam intelligant. Causa, opinor, sunt exemplarium moles, & raritas, sermonis ex Greco translatis obscuritas nonnulla, demonstrationes prolixae & arduae. Putavi igitur ex studiosae juventutis usu futurum, si elementis jam illustratis, haec a me selecta ex Archimede theoremata, & via multo faciliori ac breviori demonstrata subnecterem. Selegi porro ea, quae & admirationis plus, & utilitatis habent; viamque in demonstrando eam tenui, ut sperem eum qui elementa perceperit, haec summi Geometrae praeclarissima inventa negotio haud magno assecuturum. Sub finem adjectis tredecim propositionibus, Archimedis de cylindro & sphaera doctrinam ampliorem facio, atque inter cetera demonstro sesquialteram proportionem in tribus corporibus, sphaera, cylindro, & aequilatero cono, utroque sphaerae Circumscripto, continuari. Varia insuper sparsim, inter quae propositio 12. & corollaria prop. 14. praecipua sunt, & scholia omnia adjeci. Fruere istis, quisquis Geometriae candidatus es; & quantum ex Euclide profeceris, in Archimede experire. Cumque

in veritatum pulcherrimarum contemplatione defigi
te, evehique sursum persenseris, mentem ab infimis
hiscē rebus feliciter jam avulsum attolle etiam al-
tius, atque dirige ad veritatem primam, ater-
nam, immensam, quæ Deus est, cujus ineffabili
visione nos futuros aliquando aeternum beatos confido.
Vale.

Theoremata selecta ex Archimede.

DEFINITIONES.

Seu vocum nonnullarum explicatio.

Esto circulus BECG, cujus centrum A, diameter BC, *Fig. 23.* quam ad rectos angulos secet recta EG non per centrum, videlicet in D. Ex centro autem educantur radii AE, AG. *Tab. ex Archimede.* His positis,

1. Sector sphaerae est, qui a sectore circulari AECG, seu AEBG, circa diametrum BC in orbem actio, producitur.

2. Segmentum seu portio sphaerae est, quae a circulari segmento ECG, seu EBG, circa eandem diametrum BC in orbem actio, describitur.

3. Portionis sphaericae (EBG) vertex est diametri immobilis extremitas B: Basis est circulus a recta EG descriptus: Axis est diametri pars BD inter verticem B, & D centrum baseos intercepta.

4. Cum sphaericae portionis aut corporis ei inscripti, aut conici superficiem nomino, semper intelligo absque basi; & dum cylindri superficiem dico, intelligo similiter absque basibus; nisi adjungatur (*tota*;) tunc enim accipiuntur & bases.

Rursum cum de cylindris vel conis ago, non alios intelligo quam rectos.

Axiomata.

1. **P**olygoni circulo inscripti ambitus minor est circuli peripheria. *Fig. 1. & 16.*

2. Polygoni circulo circumscripti ambitus circuli peripheria major est. *Fig. 1.*

3. Quod si polygonum circulo inscriptum, circa diametrum (AE) una cum circulo circumagatur; erit corporis a polygono geniti superficies minor sphaerae superficie. Et si polygonum circulo circumscriptum, circa diametrum una cum circulo circumagatur; erit corporis a polygono geniti superficies major superficie sphaerae. *Fig. 16.*

4. Similiter, ambitus polygoni inscripti segmento circulari (DAF,) minor est peripheria segmenti (DAF.) Et si polygonum

gonum segmento inscriptum una cum segmento, circa segmenti axem (AO) circumagatur; erit corporis a polygono geniti superficies minor superficie portionis spherice (DAF.)

Fig. 3. & 6. 5. Superficies prismatis cylindro inscripti minor est cylindri superficie; circumscripti vero major.

Fig. 4. & 8. 6. Et superficies pyramidis cono inscriptæ minor est coni superficie; circumscriptæ autem major.

PROPOSITIO PRIMA.

Data sint figura quæcunque seu plana seu solida, A, B: Sint autem magnitudines alie semper atque alie, quæ figuras datas A ac B semper minus ac minus excedendo, in ipsas * desinant, & tamen semper inter se æquales sint:

* Defn. 6.
l. 12.

Dico etiam figuras A & B æquales esse.

E. F. Si non, alterutra major erit. Sit ergo A. B. X. A major quam B excessu X. Per hypothese[m] dantur magnitudines E, F inter se æquales, quæ excedant figuras A, B excessu minori quam X, quo A ponitur superare B. Ergo F minor est quam A. Sed F per hypothese[m] est æqualis E. Ergo etiam E minor est quam A; quod est absurdum, cum per hyp. E excedat A. Eodem modo ostendam B non posse esse majorem /quam A. Ergo cum neutra sit major altera, æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II.

Data sint figura A & B; sint autem magnitudines alie semper atque alie, quæ a figuris datis semper minus ac minus deficiendo, in ipsas † desinant, & semper inter se æquales sint:

† Defn. 6.
h. 12.

Dico etiam figuras datas A, B æquales fore.

A. B. Z. Si non, alterutra minor erit. Esto igitur A minor quam B defectu Z. Per hypothese[m] dari possunt magnitudines O, P inter se æquales, quæ deficiant a figuris datis A & B defectu minori quam Z, quo ponitur A deficere à B. Ergo P major est

est quam A. Sed P per hypothesim est æqualis O. Ergo etiam O major est quam A, quod repugnat hypothesi, qua statuitur O minor quam A. Eodem modo ostendam B non esse minorem quam A. Quare cum neutra sit minor altera, æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Ambitus polygonorum circulo circumscriptorum & inscriptorum, desinant in circuli peripheriam. Similiter & polygona ipsa in circulum desinant.

Si nimirum arcus sine fine bisectis, plura semper ac plura latera circulo circumscribantur & inscribantur.

Fig. 1. sub. en Archim.

1. Pars. Intelligentur circulo inscripta & circumscripta polygona ordinata; sive ut traditur p. 12. 1. 4. sive ut in hac figura, perinde erit. Manifestum est (a) FI esse ad OG (hoc est (b) totum ambitum circumscriptum ad totum ambitum inscriptum) ut IA est ad CA. Atqui IC excessus rectæ IA supra CA, fit tandem quacunq; dato minor, si plura semper ac plura in infinitum latera circumscribi & inscribi intelligamus. Ergo etiam excessus ambitus circumscripti supra ambitum inscriptum tandem fiet quovis dato minor. Ergo multo (c) magis excessus ambitus circumscripti supra peripheriam fiet quocunq; dato minor. Similiter, quia jam ostendi defectum ambitus inscripti ab ambitu circumscripto fieri quovis dato minorem, multo (d) magis defectus inscripti ambitus a peripheria fiet quovis dato minor. Ambitus igitur tam inscripti quam conscripti in peripheriam (e) desinant. Quod erat primum. Hec ulterius demonstrare opere pretium non est, cum satis sint manifesta.

(a) Per corol. 1. p. 4. l. 6. (b) Per 12. l. 5.

(c) Patet en. anal. 1.

(d) Patet en. anal. 2. (e) Defn. 6. l. 12.

2. Pars. Quia jam ostensum est excessum lateris FI supra latus EC fieri tandem quovis dato minorem; (est enim FI ad EC, ut IA ad CA;) etiam excessus quadrati FI, supra quadratum EC fiet quovis dato minor. Sed ut quadratum FI ad quadratum EC, ita (f) polygonum circumscriptum ad polygonum inscriptum. Ergo etiam excessus polygoni circumscripti supra inscriptum tandem fiet dato minor. Ergo multo magis excessus polygoni circumscripti supra circulum tandem fiet dato minor; ac proinde & polygoni inscripti defectus a circulo, dato minor aliquando erit. Igitur polygona circulo tam inscripta quam circumscripta in circulum (g) desinant. Quod erat alterum.

(f) Per 20. l. 6.

(g) Defn. 6. l. 12.

PROPOSITIO IV.

Fig. 1.
Defin. 3. 14.

Polygonum * ordinatum circulo conscriptum (FI NTR) aequatur triangulo, cujus basis est ambitus polygoni, altitudo vero circuli radius.

Et polygonum ordinatum circulo inscriptum aequatur triangulo, cujus basis est polygoni inscripti ambitus, altitudo vero perpendicularis (AO) in latus unum ex centro ducta.

¶ per 18. 13.

1. Pars. Radius AB ad contactum ductus * est perpendicularis ad tangentem IF . Quare si ductis rectis AF , AI , AN , &c. polygonum resolvatur in triangula; erit radius AB communis omnium altitudo; adeoque triangula ipsa liquet esse aequalia. Ergo triangulum basim habens parem summæ laterum FI , IN , NT , &c. altitudinem vero AB , æquabitur illis + omnibus, hoc est, toti polygono circumscripto.

+ Per 1. 1. 6.

¶ per 1. 1. 6.

2. Pars. Simili fere ratiocinio concludetur.]

PROPOSITIO V.

Fig. 2.

Circulus est equalis triangulo, cujus basis est peripheria circuli, altitudo autem semidiameter.

Polygona ordinata circulo circumscripta, & triangula bases habentis ambitum polygoni, altitudinem vero radium circuli, semper sunt (a) aequalia. Atqui polygona circulo in infinitum circumscripta, in circulum (b) definunt: similiterque triangula (ut mox ostendam) quæ pro basi habent ambitum polygoni circumscripti, pro altitudine vero radium AB , tandem definunt in triangulum pro basi habens peripheriam, pro altitudine radium AB . Ergo (c) circulus, & triangulum pro basi habens peripheriam, pro altitudine radium AB , aequalia sunt.

(c) Per 1. hujus.

Quod autem triangula sub ambitu polygoni & radio, definunt in triangulum sub peripheria & radio, sic ostendo. Triangula sub ambitu circumscripti polygoni & radio AB sunt ad triangulum sub peripheria & radio AB , ut (d) basis ad basim, nempe ut ambitus polygoni ad peripheriam; cum altitudinem habeant communem. Sed ambitus polygoni in peripheriam (e) definit. Ergo & triangula definunt in triangulum.

(e) Per 3. hujus.

Corol.

Corollaria.

1. **E**X hac & 41. l. 1. patet rectangulum sub radio & dimidia circumferentia esse æquale circulo: sub radio & tota circumferentia esse duplum: sub tota diametro & tota circumferentia esse quadruplum circuli.

2. Circulus est ad quadratum sibi inscriptum, ut circumferentia dimidia (CDE) ad diametrum; ad quadratum vero circumscriptum, ut quarta circumferentiz pars ad diametrum. Fig. 5. l. 4.

Nam rectangulum sub CDE & radio CA seu CF, (hoc * est ipse circulus,) est ad rectangulum GFCE, nimirum sub FG & CF, (hoc est ad quadratum inscriptum BCDE,) ut † CDE dimidia circumferentia est ad FG seu CE diametrum; quod erat primum. Ac proinde circulus est ad duplum rectanguli GFCE, (hoc est ad FH quadratum circumscriptum,) ut CDE ad duplam diametrum CE, sive ut quadrans CD ad diametrum CE. * Per coroll. præced.

(3.) [Figurarum Isoperimetrarum capacissima est circulus. Sit perimeter polygoni cujuscunque [e. gr. quadrati] ECHI aqualis circumferentia circuli. Dico quod circuli area major est quam area polygoni. Area enim circuli aqualis est triangulo cujus basis est circumferentia; altitudo vero semidiameter FA: & Area polygoni aqualis triangulo cujus basis est Perimeter Polygoni, circumferentia circuli ex hypothesis aqualis, & altitudo perpendicularis FO a centro circuli in latus polygoni demissa; qua quidem cum radio circuli semper sit minor, liquet aream polygoni area circuli esse minorem. Q. E. D. Et similiter inter figuras solidas aequalibus superficiibus contentas, Sphæra omnium capacissima demonstrabitur.] Fig. 30.

PROPOSITIO VI.

Circuli circumferentia diametrum continet minus quam ter & unam septimam (scilicet $\frac{1}{7}$;) plus vero quam ter & $\frac{1}{7}$.

Ad hujus theorematis demonstrationem, assumit Archimedes polygonum ordinatum, alterum circulo circumscriptum, inscriptum alterum, utrumque 96. laterum. Deinde ostendit 96. latera circulo circumscripta continere diametrum minus quam ter & $\frac{1}{7}$. ac proinde circumferentiam quæ ipsis minor est, etiam continere diametrum minus quam ter & $\frac{1}{7}$.

Laterum

Latera vero 96, circumferentiae inscripta, (ac proinde & circumferentiam, quae ipsis major est,) amplius, continere diametrum quam ter & $\frac{1}{7}$. Porro longior est hujus rei demonstratio quam ut hoc loco adferri debeat. Quod si ad polygonum plurium adhuc laterum Geometricum ratiocinium velimus extendere, limites jam statutos arctare poterimus magis magisque sine termino, atque ita propius in infinitum ad veram proportionem accedere. Praestitum est hoc a Ludolpho Ceulen, Grimbergero, Metio, Snellio, aliisque. Proportionibus praecipuas haecenus inventas hic subijcio.

Vid. Fig. 1. [Cum autem Tangens graduum 30 in 12 ducta, det hexagoni circumscripti; & Sinus graduum 30 in 12 ductus, det hexagoni inscripti perimetrum: Cum etiam consimiliter Tangens gradus dimidii in 720 ducta, polygoni laterum 360 circumscripti; & Sinus gradus dimidii in 720 ductus, polygoni laterum 360 inscripti perimetrum exhibeat; atque ita porro in infinitum; Obscurum esse nequit quo pacto & datis jam Sinuum atque Tangentium tabulis, numeri sequentes inveniri poterunt.]

Prima est Archimedis hujusmodi

Diameter 7

Circumfer. 22 major vera.

Diameter 71

Circumf. 223 minor vera.

Rationes 22 ad 7, & 223 ad 71, si ad commune consequens reducantur, (quod sit eodem modo, quo fractiones revocantur ad eundem denominatorem;) rationes orientur 1562 ad 497, & 1561 ad 497.

Posita igitur diametro partium 497.

erit circumferentia major vera 1562

& circumferentia minor vera 1561

Utraque igitur a vera differt quantitate minori, quam sit $\frac{1}{497}$ pars diametri. Quod si rationes 7 ad 22, & 71 ad 223 reducantur ad commune consequens; provenient rationes 1561 ad 4906, & 1562 ad 4906.

Posita igitur circumferentia partium 4906.

erit diameter minor vera 1561.

diameter major vera 1562.

Utraque igitur a vera diametro differt quantitate minori, quam sit pars $\frac{1}{4906}$ circumferentiae.

Proportio tradita a Metio est Archimedeae multo accuratior. Juxta hanc est

Diameter 113.

Circumf. 355.

Inter

7

Sed utraque multo exactior est gemina illa Ludolphi & Ceulen: prioris termini constant notis 21, posterioris vero notis 36.

I 000000000000000000000000

314,159265,358979,323847.

314159265358979323846.

Diameter

Circumf. major vera.

314159265358979323846264338327950289.

Circumf. minor vera.

314159265358979323846264338327950288.

Frustra igitur sit ulterius progredi. Progrediere nihilominus ultra in infinitum, si ratiocinium Geometricum, cujus methodum expeditam tradit Snellius, placuerit continuare.

[Posita vero Circumferentia partium

I,000000,000000,000000,000000,000000,000000,000000.

Diameter erit quamproxime, partium

0,318309,886183,790671,537767,926745,028724.]

Proportionis jam traditæ fructus eximii, sunt illi qui sequuntur.

Inj

Inventio Diametri ex circumferentia.

MAjorem terminum unius è proportionibus jam traditis statue primo loco, minorem secundo, circumferentiam tertio; his tribus numeris quæzatur per regulam auream quartus proportionalis. Is erit quæsitæ diameter.

Ut si detur circumferentia maximi circuli terræ, milliaria continere Belgica unius horæ 8640, & quæzatur terræ diameter; sic stabunt termini.

355 ————— 113 ————— 8640 —————
multiplica jam secundum per tertium, & productum divide per primum; proveniunt milliaria Belgica $2750\frac{1}{4}$ pro diametro orbis terræ.

Inventio circumferentia ex Diametro.

Terminus minor unius e proportionibus supra traditis statuatur primo loco; major secundo; diameter nota tertio: His tribus numeris quæzatur quartus proportionalis. Is dabit quæsitam circumferentiam.

Ut si detur orbis terræ diameter continere milliaria Belgica unius horæ $2750\frac{1}{4}$. & quæzatur ambitus; termini ita stabunt.

113 ————— 355 ————— $2750\frac{1}{4}$ —————
Tunc secundum multiplica per tertium, & productum divide per primum: provenient milliaria Belgica 8640. pro ambitu orbis terræ.

Quam modice hæc circumferentia veram excedat, dictum est supra, excessu videlicet paulo majore, quam sint diametri terrestres duæ particule decimillionesimæ; hoc est 9. circiter aut 10. pedibus Rhynlandicis, quorum 18000. constituunt milliare horarium. Quod si utamur proportionem Ludolphinæ etiam priori, cujus termini constant 21. notis; invenietur circumferentia insensibiliter a vera differens non solum diametro data milliariarum Belgicarum 2750. qualis est terræ; verum etiam licet diameter ponatur centum millionum eorundem milliariarum, qualis fortasse est diameter firmamenti. Hac enim posita, proveniet circumferentia minori quantitate a vera differens, quam una centimillionesima particula pedis Rhynlandici. Quod si ad investigandam circumferentiam orbis terræ utamur proportionem Archimedis, intervallum circumferentiarum vera majoris ac minoris, excedet 5 milliaria Belgica. Non est igitur adhibenda Archimedea proportio, nisi in quantitate parva: imò semper expedit Metiana

Metiana uti, quæ & modicis constat terminis, & plusquam millies exactior est.

Circuli dimensio.

Semidiameter multiplicata per dimidiam circumferentiam producit aream circuli: quemadmodum patet ex coroll. 1. p. 5. hujus.

Ut si semidiametrum orbis terræ, quæ neglecta fractione continet milliaria Belgica 1375. multiplicemus per dimidium terræ ambitum, per milliaria nempe Belgica 4320; provenient milliaria Belgica quadraginta 5, 940, 000 pro circulo maximo terræ. Differentia inventæ circularis areæ a vera habetur, si differentia inventæ circumferentiæ dimidiæ a dimidia vera, ducatur in semidiametrum datam; aut si differentia semidiametri inventæ a vera, ducatur in datam semicircumferentiam.

Dimensio Cylindrorum & Conorum.

EAM hic appono, quod a circuli dimensione pendeat. Cylindrus igitur & prisma quodvis producit ex altitudine multiplicata per basim: Conus & pyramis ex tertia altitudinis parte in basim ducta; sunt enim partes tertiæ cylindrorum ac prismatum, eandem cum ipsis basim & altitudinem habentium, per 10. & 7. l. 12.

Sit basis Cylindri aut conï 50. ped. quadratorum, altitudo pedum 100. Duc 100. in 50. proveniunt 5000. pedes cubici pro soliditate cylindri. Duc tertiam partem altitudinis 100, nimirum $33\frac{1}{3}$ in 50, proveniunt 1666 $\frac{2}{3}$ pedes cubici pro soliditate conï.

PROPOSITIO VII.

Circulorum peripheria eam inter se proportionem Fig. 6. l. 12. habent, quam diametri.

Nam polygonorum similium circulo sine fine inscriptibilium ambitus sunt inter se semper ut * diametri AF & IC. Sed * Per coroll. hi † ambitus in peripherias desinunt. Ergo etiam peripheriæ † Per 3. hujus. sunt inter se ut diametri. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Superficies prismatis cylindro tam circumscripti, quam inscripti, æquatur rectangulo, cujus altitudo

endo est latus cylindri, basis vero equalis perimetro basis prismatica.

Fig. 3.

* Per defin.

3. L. 11.

† Patet ex

1. L. 6.

1. Pars. Prismatis conscripti superficies tangit cylindrum secundum lineas EA, NF, &c. quæ sunt cylindri latera; hæc autem (quod ex hyp. cylindrus sit rectus) ad planum baseos recta sunt, ac proinde etiam * recta ad lineas CG, GM, &c. Sunt vero & æqualia inter se. Igitur unum cylindri latus communis est omnium rectangulorum CO, OM, MH, &c. altitudo. Conscripti igitur prismatis superficies æquatur † rectangulo, sub ambitu basis prismaticæ, & prismatis seu cylindri latere contento.

Eadem est ratio secundæ partis. Nam latus cylindri communis rursus est altitudo rectangulorum BDIK, KIQP, &c. quæ constituunt superficiem prismatis inscripti.

PROPOSITIO EX.

Fig. 4.

PYramidis ordinata cono recto circumscripta superficies, equalis est triangulo, cuius basis est baseos pyramidalis circumferentia (FHL D,) altitudo autem latus conus (BG.)

Et pyramidis ordinata cono recto inscripta superficies æquatur triangulo, cuius basis est baseos pyramidalis circumferentia, altitudo vero perpendicularis (BO) a vertice in latus baseos deducta.

(a) Per hyp.

(b) Per 18.

L. 11.

(c) per 18.

L. 3.

(d) Collig. ex

def. 4. L. 11.

(e) Per defin.

3. L. 11.

1. Pars. Ducantur ad contactus G, K, M rectæ BG, BK, BM. Erunt hæc recti conus latera, ac proinde æquales. Et quia axis BA (a) rectus est basis plano FK D, etiam planum (b) GBA plano FK D rectum erit. Atqui HG perpendicularis (c) est ad AG communem sectionem planorum FK D & GBA. Ergo HG etiam (d) recta est plano GBA. Ac proinde perpendicularis quoque est ad (e) ipsam BG. Ergo GB latus conus, est altitudo trianguli FBH. Eodem modo latus conus erit altitudo reliquorum HBL, LBD, &c. Igitur triangulum circumferentia FHL D, & latere conus comprehensum, æquatur superficiem pyramidis circumscriptæ absque basi. Quod erat primum.

2. Partis similis fere demonstratio est.

PROPOSITIO X.

Superficies prismatis ordinati cylindro recto circumscripti definit * in cylindri superficiem: & Defn. 6.
pyramidis cono recto circumscripta superficies in conⁱ 12.
superficiem definit.

1. Pars. Prismatum ordinatorum cylindro sine fine con- Fig. 3.
scriptorum & inscriptorum superficies, habebunt tandem inter
se differentiam data minorem, uti facile patebit ex 8. & 3.
hujus. Multo igitur magis superficies circumscripti prismatis
a superficie cylindri inter inscriptam & circumscriptam me-
dia, differet differentia minori quacunque data, hoc est, † de † Defn. 6.
finet in cylindricam superficiem, minus semper ac minus ex- 12.
cedendo.

2. Pars. Eodem modo ostenditur ex 9. & 3. hujus.

In figuris tantum exhibentur cylindri & conⁱ semisses, ne
multitudo linearum confusionem pareret. Cæterum cogitandi
sunt cylindrus & conus integri, quos prismata & pyramides
circumscriptæ ambiunt. Sic enim clarius apparet planas su-
perficies circumscriptas esse majores ex 3. axiomate.

Lemma ad sequen.

Sint AB, CD, EF proportionales, sitque KB dimidia AB, Fig. 7.
& EG dupla EF; etiam KB, CD, EG proportionales
erunt.

Recta KB est ad AB, ut EF ad EG. Rectangulum ergo
KB, EG æquatur (per 16. l. 6.) rectangulo AB, EF. Sed hoc
per 17. l. 6. æquatur quadrato CD. Ergo & rectangulum KB,
EG par est quadrato CD. Ergo per 17. l. 6. KB, CD, EG
sunt proportionales.

PROPOSITIO XI.

Circulus, cujus radius (GH) est medius pro Fig. 5. & 6.
portionalis inter recti cylindri latus (BC) &
basos diametrum (BD,) æqualis est superficiei cylan-
drica.

Intelligentur circulis ABN, GPH, circumscripta esse or-
dinata polygonæ, adeoque similia, NM, RS; & super NM po-
lygono erectum esse prisma, cylindro circumscriptum. Quo-
niam BD, GH, BC ex hyp. sunt proportionales, etiam AD
scu

- (a) *Per lem.* (seu AN) GH & dupla BC (a) proportionales erunt. Jam
 (b) *Per 4. hujus.* triangulum sub AN & ambitu polygoni MN contentum, (b) æquatur polygono conscripto NM: rectangulum vero sub
 (c) *Patet ex 41. l. 1.* BC seu EF & eodem ambitu NM, (hoc est (c) triangulum sub ambitu NM & dupla BC,) æquale est (d) superficiæ prismatis cylindro conscripti. Atqui triangulum sub ambitu NM
 (d) *Per 8. hujus.* & AN, est ad triangulum sub ambitu NM & dupla BC (e) ut AN ad duplam BC. Ergo etiam polygonum NM est ad superficiem prismatis cylindro conscripti, ut AN ad duplam BC. Sed quia jam ostendi AN, GH, duplam BC, esse proportionales, ratio AN ad duplam BC est duplicata (f) rationis AN ad GH. Ergo polygonum NM ad superficiem prismatis rationem habet duplicatam rationis AN ad GH. Sed etiam polygonum NM ad simile sibi polygonum GRQS, rationem habet duplicatam rationis AN ad GH, ut facile colligitur ex 1. lib. 12. Ergo polygonum NM ad superficiem prismatis, & ad polygonum GRQS eandem habet rationem; quæ proinde æqualia (g) sunt. Eodem modo ostendam, prismaticas superficies cylindro in infinitum circumscriptibiles semper æquales esse polygonis, quæ circulo GPH in infinitum circumscribi possunt. Quare cum & superficies prismaticæ (h) in cylindri superficiem, & polygonæ (i) in circulum GPH definant, etiam cylindri superficies circulo GPH æqualis (k) erit. Quod erat demonstrandum.
 (k) *Per 1. hujus.* Ex egregio hoc theoremate exhibetur circulus æqualis superficiæ cylindricæ.

Corollaria.

Fig. 5. & 6. I. **S**uperficies cylindri recti, æqualis est rectangulo sub latere BC, & baseos peripheria contento.

- Dupla BC (ut ostensum supra) est ad GH, ut GH ad BA, seu AN; Hoc est, ut (a) peripheria P ad peripheriam BN. Ergo triangulum sub prima, nempe dupla BC, & quarta, nempe peripheria BN æquatur (b) triangulo sub secunda, GH; & tertia, peripheria scilicet P. Sed triangulum sub GH & peripheria P, æquale (c) est circulo GPH, hoc est, (d) superficiæ cylindricæ. Ergo etiam triangulum sub dupla BC & peripheria BN, (hoc est (e) rectangulum sub BC & peripheria BN,) cylindricæ superficiæ æquale erit. Quod erat demonstrandum.
 (a) *Per 7. hujus.*
 (b) *Patet ex 16. l. 6.*
 (c) *Per 5. hujus.*
 (d) *Per 11. hujus.*
 (e) *Patet ex 41. l. 1.*

Ex hoc corollario manifestum est rectangulorum proprietates superficiebus cylindricis rectis esse communes. Esto igitur corollarium

2. Cylindricæ superficies (BM, QN) æque altæ sunt in- Fig. 20 & 21.
ter se ut basium diametri (BF, QR.) l. 12.

Nam rectangula sub peripheriis CL, SE, & rectis æquali-
bus FM, RN comprehensâ, quibus cylindricæ superficies
(a) sunt æquales, sunt inter se (b) ut bases; peripheriæ vi- (a) Per cor. 1.
delicet CL, SE; hoc est (c) ut diametri BF, QR. (b) Per 1. l. 6.
(c) Per 7.

3. Cylindricæ superficies (CI, AR) quæ bases habent æ-
quales, sunt inter se ut altitudines (TI, BR.) hujus.
Fig. 23 &

Rectangula enim sub æqualibus per hyp. peripheriis GH, 24. l. 12.
MQ, & lateribus TI, BR contenta, quibus superficies (d) (d) Per cor. 1.
cylindricæ sunt æquales, sunt inter (e) se ut TI, BR. (e) Per 1. l. 6.

4. Similes cylindricæ superficies (BM, RI) rationem Fig. 20 &
habent duplicatam ejus, quam habent basium diametri 21. l. 12.
(BF, QR.)

Cum cylindri ponantur similes, erit MF ad IQ, (f) ut BF (f) Defin. 4.
ad QR, hoc est (g) ut peripheria CL ad peripheriam SE. l. 12.
Quare etiam rectangula sub peripheriis CL, SE, & lateribus (g) Per 7.
MF, IQ contenta, similia erunt; ac proinde rationem in- hujus.
ter se habebunt (h) duplicatam ejus, quam habet MF ad IQ, (h) Per 20.
hoc est BF ad QR. Ergo & cylindricæ superficies, &c. l. 6.

5. Cylindricæ superficies (BM, RI) rationem inter se ha- Fig. eadem.
bent (i) compositam ex rationibus laterum (FM, IQ) & (i) Patet ex 23
diametrorum (BF, QR) quæ sunt in balibus. l. 6 & 7. hujus.

6. Si æquales sunt cylindricæ superficies AR, FD; erit ut Fig. 24 &
diameter AB ad diametrum FN, ita (k) reciproce altitudo 25. l. 12.
FH ad altitudinem RB: & è converso. (k) Ex 14. l. 6.

7. Denique ex eodem 1. corol. habetur cylindricæ super-
ficii dimensio; si nimirum altitudo ducatur in bases peri-
pheriam. Ut si altitudo sit pedum 20. peripheria basis pedum
6. multiplica 20. per 6. proveniunt 120. pedes quadrati pro
cylindrica superficie.

PROPOSITIO XII.

Cylindri recti superficies est ad basim (ABN;) Fig. 6 & 5.
ut cylindri latus (CB) ad (BO) quartam Archim.
partem diametri bases.

Sit GH media proportionalis inter BC & BD diametrum (a) Per lem.
basis, ac proinde etiam media (a) proportionalis inter BA seu ante p. 11.
AN, & duplam BC. Circulus GPH radii GH, æquatur hujus.
curvæ superficiæ (b) cylindricæ CD. Sed circulus GPH ad (b) Per 11.
cylindri basim ABN, rationem habet duplicatam (c) rationis hujus.
GH ad AN; hoc est (d) eandem quam dupla BC ad BA ra- (c) Per 2. l. 12.
dium; hoc est eandem quam BC ad BO quartam diametri (d) Per hyp. &
partem. desin. 10. l. 5.

partem. Ergo etiam superficies cylindrica est ad basim ABN, ut BC ad BO quartam partem diametri BD. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Superficies cylindri habentis latus diametro basis æquale, baseos quadrupla est. Si vero latus fuerit quarta pars diametri baseos, superficies cylindri basi æqualis erit. Utrumque ex propositione manifestum est.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 9 & 8. **C**irculus, cujus radius (OL) est medius proportionalis inter conii recti latus (BC) & basis radium (AC,) æqualis est superficiei conicæ.

Intelligentur circulis ACG, OPL circumscripta esse polygona ordinata EF, IN, & super polygono EF erectam esse pyramidem cono circumscriptam.

- Quoniam per hyp. AC seu AG est ad OL, ut OL ad BC, erit ratio AG ad BC duplicata (a) rationis AG ad OL. Sed ut AG ad BC, ita triangulum sub AG & ambitu EF est ad triangulum sub BC & eodem ambitu EF. Ergo ratio trianguli sub AG & ambitu EF ad triangulum sub BC & eodem ambitu, est etiam duplicata rationis AG ad OL. Sed triangulum sub AG & ambitu EF æquale est (b) polygono EF: & triangulum sub BC & eodem ambitu EF æquale (c) est superficiei pyramidis circumscriptæ. Ergo ratio polygones EF ad superficiem pyramidis etiam est duplicata rationis AG ad OL. Atqui etiam ratio polygones EF ad polygonum sibi per constr. simile IN, est duplicata (d) rationis AG ad OL. Ergo polygonum EF, ad superficiem pyramidis & ad polygonum IN eandem habet rationem, quæ proinde æqualia (e) erunt. Eodem modo ostendam superficies pyramidum, quæ cono in infinitum magis magisque polygonæ circumscribi possunt, semper æquales esse polygonis quæ circulo OPL possunt circumscribi etiam in infinitum. Quare, cum & pyramidum (f) superficies in conii superficiem, & polygonæ in circulum (g) OPL tandem desinant, etiam conii (h) superficies & circulus OPL erunt æqualia. Quod erat dem.
- Ex hoc præclaro theoremate exhibetur circulus superficiei conicæ æqualis.

Corol-

Corollaria.

1. **R**ecti conī superficies aequalis est triangulo, sub Fig. 8 & 9.
conī latere (BC) & baseos peripheria (CG)
comprehensō.

Sit OL radius media proportionalis inter AC & BC.
Quia peripheria CG est ad peripheriam P, ut (a) radius AG ad (a) Per 7.
radius OL; hoc est per hyp. ut OL ad BC: erit triangu-
lūm sub prima, nempe peripheria CG & sub quarta BC (b) (b) Patet en
æquale triangulo sub secunda, nempe peripheria P, & tertia 16. l. 6.
OL; hoc est (c) circulo OPL, hoc est (d) superficiēi conicæ (c) Per 5.
BCD. Quod erat demonstrandum. hujus.

Ex hoc corollario liquet superficies conicas triangulorum (d) Per hanc
subire leges. Itaque 13.

2. Superficies conicæ (BAF, QXR) æqualia latera (BA, Fig. 20 & 21.
QX) habentes, sunt inter se ut basium diametri (BF, QR.) l. 12.

3. Et (CFT, AZB) quæ bases habent æquales, sunt in- Fig. 23 &
ter se ut latera (CF, AZ.) 24. l. 12.

4. Et quæ similes sunt (BAF, QZR,) duplicatam habent Fig. 20 & 21.
rationem ejus, quæ est inter basium diametros. l. 12.

5. Et quælibet, rationem inter se habent compositam ex Fig. ead.
rationibus laterum (BA, QZ) & diametrorum (BF, QR)
quæ sunt in basibus.

6. Et quæ æquales sunt, reciprocant latera & basium dia-
metros; & quæ reciprocant, sunt æquales.

Quæ omnia demonstrantur ex coroll. 1. ut supra corollaria
de cylindrica superficie deduximus ex corollario isthic primo.

7. Metiemur denique conicam superficiem, si latus FC per Fig. 25. l. 12.
baseos peripheriam dimidiam multiplicemus. Ut si latus sit
pedum 5. peripheria baseos pedum 20. duc 5. per 10. pro-
veniunt 50. pedes quadrati pro conica superficie. Dem. patet
ex eodem 1. coroll.

PROPOSITIO XIV.

Conī recti superficies est ad basim, ut latus (BC) Fig. 8 & 9.
ad basis radium (AC.) Archim.

Inter latus BC & basis radium AC, sit media proportio-
nalis OL. Ergo ratio BC ad AC est duplicata * rationis OL * Defn. 10.
ad AC. Jam circulus radii OL † est æqualis superficiēi co-
nicæ CBD. Sed hujus ratio ad conī basim ACG est du-
plicata * rationis OL ad AC; ac proinde eadem cum ratione * per 2. l. 12.
† Per 13. hujus.

BC ad AC. Ergo etiam ratio superficiei conicæ CBD est ad basim ACG, ut BC ad AC. Quod erat dem.

Corollaria.

Fig. 27. 1. Superficies coni recti a triangulo æquilatèro circa perpendiculararem (KA) circumactò geniti, baseos (QT) dupla est.

Est enim KB latus æquale BD, adeoque duplum semiseos AB, quæ baseos radius est.

Fig. 24. 2. Superficies coni a rectangulo triangulo æquicruri (EBD) producta, est ad basim, ut in quadrato diameter ad latus.

(a) Patet ex Ducta enim perpendiculari BA, (a) angulus rectus B bisecatur, adeoque ABD semirectus est. Est autem & ADB
26. l. 1. (b) semirectus. Ergo DA, BA (c) æquales sunt; ac proinde BD est diameter quadrati AK, latus vero AD. Est vero
21. p. 32. l. 1. (c) per 6. l. 1. eadem AD semidiameter baseos PT, cum perpendicularis
(d) patet ex AB secet (d) bifariam ED. Ex quibus & hac 14. patet
26. l. 1. corollarium.

Fig. 24. 3. Superficies cylindri recti (GK) est ad superficiem coni recti (GBN,) ut cylindri latus ad dimidium latus coni.

Nam superficies coni GBN est ad basim MI, ut latus BN ad * semidiametrum basis QN; hoc est ut dimidium lateris BN ad quartam partem diametri GN. Est autem basis MI ad superficiem cylindri GK, ut † quarta pars diametri ad NK cylindri latus. Ex æquo igitur superficies conica GBN est ad superficiem cylindricam GK, ut dimidium latus coni ad cylindri latus NK. Quod erat demonstrandum.

* Per 14. hujus.

† Per 12. hujus.

Lemma ad sequen.

Fig. 10. IN triangulo NPV ducta sit QD parallela ad NV: Dico rectangulum sub PN & NV, æquari rectangulo sub PQ, QD, una cum rectangulo sub NQ & duabus simul sumptis NV, QD.

Duc lateri NP perpendiculararem NA æqualem NV, completoque NO rectangulo, ducatur diameter PA. Tum ex Q parallela QE ad NA secet PA in B. Per B ducatur CF parallela

parallela ad NP. Quoniam AN est par NV, patet etiam
 *QB esse parem QD. Igitur rectangulum ON est rectang. ^{*Ex corol. 1. p. 4. l. 6. & ex 11. l. 5.}
 PNV, & FQ est PQD. Restat ut probemus rectangula
 OB, EC, BN æquari rectangulo sub NQ & duabus NA,
 QB; hoc est sub NQ & duabus NV, QD. Id vero est
 manifestum: rectangulum enim sub NQ & NA, QB, æqua-
 tur † his tribus rectangulis; sub NQ & CA, (hoc est spatio † Per 1. l. 2.
 EC,) sub NQ & NC, (hoc est spatio BN,) sub NQ & QB,
 hoc est rursus spatio BN, ac proinde spatio OB, quod
 ipsi BN * æquale est. Liquet ergo propositum. ^{* per 43. l. 1.}

PROPOSITIO XV.

SI conus rectus sectus sit plano QSR basi NZO Fig. 11 & 12.
 parallelo; Dico circulum GHM, cujus radius
 GH est medius inter partem lateris NQ, & circu-
 lorum QSR, NZO radios QD, NV simul
 sumptos, æqualem esse superficiei conica inter paral-
 lelos circulos QSR, NZO intercepta.

Inter PN & NV media sit GF. Item inter PQ & QD
 sit media GK; describanturque circuli GFL, GKT. Erit
 hic (a) æqualis superficiei conicæ QPR, ille superficiei (b) (a) Per 13.
 NPO. Rectangulum PNV æquatur (c) rectangulo PQD, ^{hujus.}
 una cum rectangulo sub NQ & NV, QD simul sumptis. (b) Per eand.
 Sed quia (d) GF media est proportionalis inter PN, NV, (c) Per lemm.
 rectang. PNV est æquale (e) quadrato GF: Et quia GK est (d) per constr.
 (f) media inter PQ, QD, rectang. (g) PQD æquatur qua- l. 6.
 drato GK: Et quia GH media (h) est inter QN & QD, (i) per constr.
 NV simul sumptis, rectangulum sub QN & QD, NV (g) Per 17. l. 6.
 simul sumptis, æquale est (i) quadrato GH. Ergo quad. (h) Per hyp.
 GF par quoque est quadratis GH, GK. Ergo, cum circuli (i) per 17. l. 6.
 sint inter se ut (k) quadrata radiorum, erit quoque circulus (k) per 2. l. 12.
 GLF æqualis duobus circulis, GKT & GHM. Atqui cir-
 culus GLF est æqualis (l) superficiei conicæ NPO. Ergo (l) Per 13.
 etiam superficies conica NPO æquatur duobus circulis GKT ^{hujus.}
 & GHM. Atqui superficiei NPO pars una QPR (m) æ- (m) per eand.
 qualis est circulo GKT. Ergo reliqua, inter parallelos cir-
 culos ZZ, SS comprehensa, æquatur circulo GHM. Quod
 erat demonstrandum.

Lemma ad sequen.

Fig. 13. **R**ectæ (BH, CG) quæ in circulo æquales arcus (BC, HG) intercipiunt, sunt parallelæ.
 Ducatur enim CH. Quoniam arcus BC, HG per hyp. * Per 26. l. 3. sunt æquales, etiam * anguli BHC, GOH alterni æquales † Per 23. l. 1. erunt. Ergo † BH & CG sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 13. **I**nscribatur circulo figura regularis, parilatera & æquilatera; Ducaturque EB ab extremitate diametri ad B, terminum lateris diametro proximi, angulos vero æqualiter distantes ab A jungant rectæ BH, CG, DF:

Dico rectangulum quod diametro AE, & subtensa EB continetur, æquari rectangulo, quod fit ex latere uno figurae inscriptæ (AB, vel BC, &c.) & ex omnibus jungentibus BH, CG, DF simul sumptis.

Duc CH, DG: quoniam BH, CG, DF intercipiunt arcus (a) Per 26. l. 3. æquales BC, HG; CD, GF; erunt (b) parallelæ. (b) Per lem. Pari argumento parallelæ sunt BA, CH, DG, EF. Omnia prae. igitur triangula (c) BAK, KHL, LCM, MGN, NDO, OFE æquiangula sunt. Ergo (d) ut BK ad KA, sic HK ad KL; & ut HK ad KL, sic CM ad ML; & ut CM ad ML, sic GM ad MN; & ut GM ad MN, sic DO ad ON; & ut DO ad ON, sic FO ad OE. Ergo (e) per 12. l. 5. (e) ut una antecedentium BK ad unam consequentium KA; sic omnes antecedentes BK, KH, CM, MG, DO, OF, (hoc est omnes jungentes BH, CG, DF) sunt ad omnes consequentes AK, KL, LM, MN, NO, OE; hoc est ad diametrum AE. Sed ut BK ad (f) AK, sic EB ad BA. Ergo ut omnes simul BH, CG, DF ad AE, sic EB est ad BA. (g) per 16. l. 6. Ergo (g) rectangulum sub omnibus jungentibus BH, CG, DF & sub BA, æquatur rectangulo sub AE & EB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVII.

Segmento circuli DAF , cujus basis DF perpendicularis sit diametro AOE , inscribatur figura æquilatera & parilatera, ducaturque ut in precedenti recta EB : Fig. 14

Dico rectangulum sub EB & parte diametri AO , quæ segmenti axis est, comprehensum, æuari rectangulo sub latere uno figure inscriptæ, & omnibus jungentibus BH , CG una cum DO dimidio basis DF simul sumptis comprehenso.

Demonstratio eadem quæ præcedentis.

Lemma 1. ad sequent.

Inscripta sit sphæræ maximo circulo figura regularis, cujus Fig. 13
latera quaternarius metiatur, circa axem AE consistens:
Quo manente, circulus cum figura circumagatur.

Dico sphæræ inscriptum iri corpus conicis rectis superficiebus contentum.

Quod BA , HA , item DE , FE describant integras conorum rectorum superficies manifestum * est. Deinde quia * Vide definit.
2. l. 12.
lineæ CB , GH , & GF , CD concurrunt productæ in eodem
utrimque puncto diametri AE similiter pertractæ, quæ jungentes secant normaliter: etiam liquet has describere partes superficierum rectorum conicarum, interceptas inter parallelos circulos, quos in sphærica superficie describunt vertices angulorum B , C , D .

Lemma 2.

Segmenti sphæræ, cujus axis AO , sectio maxima esto Fig. 14
 DAF . Huic inscripta sit figura æquilatera dempta basi,
quæ circa axem AO in orbem convertatur.

Dico segmento sphærico inscriptum iri corpus conicis superficiebus contentum.

Probatur ut lemma præced.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 13.

Ponantur eadem quæ in primo lemmate; & ducatur recta EB, ab extremitate diametri ad terminum lateris diametro proximi:

Dico omnibus superficiebus conicis sphaera inscriptis æqualem esse circulum, cujus radius (I) potest † rectangulum AEB, comprehensum videlicet, sub diametro AE, & subtensa EB.

† Potentia
recta est qua-
dratum ejus.

* Per 17. l. 6. Hoc est, * cujus radius (I) est medius proportionalis inter AE & EB.

Quoniam rectæ BH, CG, DF æquantur rectis BK, CM, DO bis sumptis, erit † rectangulum sub latere uno figuræ inscriptæ maximo circulo, (videlicet sub AB, vel BC, vel CD, vel DE) & sub omnibus simul jungentibus BH, CG, DF, æquale rectangulo sub AB & BK, sub BC & composita ex BK & CM, sub CD & composita ex CM & DO, sub DE & DO; sic enim rectæ BK, CM, DO singulæ fuerunt bis acceptæ. Atqui rectangulum sub AB & omnibus jungentibus BH, CG, DF simul sumptis æquatur (a) rectangulo AEB, hoc est (b) quadrato I. Ergo quadratum I æquale est rectangulis sub AB & BK, sub BC & composita ex BK, CM, sub CD & composita ex CM, DO, sub DE & DO.

(a) Per 16.
hujus.

(b) Per hyp.

Sint jam inter AB & BK media proportionalis P; inter BC & compositam ex BK, CM, media Q; inter CD & compositam ex CM, DO, media R; inter DE & DO media S.

(c) Per 17. l. 6. Erunt igitur quadrata P, Q, R, S æqualia (c) rectangulis supradictis. Quare cum quadratum I jam ostenderit isdem æquari rectangulis, etiam quadratis P, Q, R, S æquale erit. Cum

(d) Per 2. l. 12. igitur circuli sint inter se (d) ut quadrata radiorum; etiam circulus radio I descriptus, omnibus simul circulis quorum radii

(e) Patet ex 22. l. 6. & 24. l. 5. P, Q, R, S, æqualis (e) erit. Atqui circuli radiorum P & S, æquantur (f) superficiebus conicis quas produxerunt latera

(f) Per 13. hujus. AB, ED, siquidem P est media proportionalis inter AB coniatus, & BK radium baseos, S vero media est inter ED &

(g) Per 15. hujus. DO: & circulus radii Q est æqualis segmento (g) superficiei conicæ quæ intercipitur inter duos parallelos circulos diametrorum CG, BH, quia Q media est inter BC, & compositam ex BK, CM: & ob eandem causam circulus radii R æquatur segmento superficiei conicæ inter parallelos circulos diametrorum CG, DF interceptæ. Ergo circulus radio I descriptus, æquatur omnibus simul conicis superficiebus sphaeræ inscriptis. Quod erat demonstrandum.

P R O-

PROPOSITIO XIX.

Ponantur eadem quæ in 2. lemmate, & ducatur *Fig. 14.*
 recta EB ab extremitate diametri AE ad ter-
 minum lateris AB diametro proximi :

Dico omnibus superficiibus conicis segmento spha-
 rico DAF inscriptis equalem esse circulum, cujus
 radius est medius proportionalis inter EB , & seg-
 menti axem AO .

Demonstratio plane eadem, quæ præcedentis : sed pro
 P. 16. citetur P. 17.

PROPOSITIO XX.

Superficies conica sphaera inscripta, in sphaera su-
 perficiem desinunt.

Data sit superficies quantumvis parva X . Manifestum est in- *Fig. 15.*
 tra sphaericam superficiem $ACEG$ dari aliam posse concentri-
 cam, quæ ab hac deficiat quantitate minori quam sit X . Am-
 barum plano sectarum per centrum, maximi circuli sint
 $ACEG$, $DPLM$. Ducatur diameter ADE , & in D tan-
 gat NQ . Si arcus AE bisecetur in C , & residuum bisecetur
 rursus & sic deinceps, relinquetur * tandem arcus AB minor * *Patet ex*
 arcu AN . Huic si subtendatur recta AB , manifestum est cam *lem. 2. schol.*
 non pertingere ad peripheriam $PDML$, esseque latus figuræ *post 11. l. 6.*
 æquilateræ & parilateræ circulo $CAGE$ inscriptæ, cujus nul-
 lum latus pertingat ad peripheriam $PDML$. Quare si cir-
 ca diametrum AE in orbem agantur omnia, patet superfi-
 ciei sphaericæ exteriori inscribendas esse conicas superficies,
 quæ includant superficiem sphaericam alteri concentricam, ac
 proinde illa sint † majores. Quoniam igitur sphaerica super- † *Per axia. 3.*
 ficies $DPLM$, deficit a superficie sphaerica $ACEG$ quanti- *hujus.*
 tate minori quam sit data X ; multo magis superficies conic-
 æ ab eadem sphaerica $ACEG$, deficient quantitate minori
 quam sit data X , ac proinde * in $ACEG$ superficiem cefi- * *Defin. 6.*
 nent. Quod erat demonstrandum. *l. 12.*

PRO-

PROPOSITIO XXI.

Fig. 17.

Conica superficies segmento spherico DAF inscripta, in ipsam segmenti sphericam superficiem desinunt.

Demonstrabitur eodem fere ratiocinio quo præcedens.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 16.

Demonstratum est propof. 18. circulum cujus radius est medius proportionalis inter diametrum AE , & rectam EB , quæ ab extremitate diametri ducitur ad terminum lateris AB diametro proximi, æqualem esse omnibus superficiibus conicis spheræ inscriptis.

† Vide defn. 6. l. 12.

Dico hunc circulum desinere † tandem in circulum, cujus radius est AE spheræ diameter.

Nam si plura semper ac plura in infinitum latera circulo maximo inscribantur, (quæ deinde circa AE in orbem acta conicas producant superficies,) patet latus AB fieri tandem quavis data recta minus, ac proinde subtensam EB ad diametrum AE accedere ad intervallum etiam quovis dato minus; unde fit ut differentia ipsarum AE , BE etiam fiat quavis data minor. Ergo multo magis media proportionalis inter AE , BE , quæ semper major est quam BE , differet ab AE tandem defectu minori quocunque dato. Ergo etiam circulus cujus semidiameter est media inter AE & BE , a circulo cujus est AE , tandem differet defectu minori quocunque dato:

¶ Defn. 6. l. 12.

hoc est in * ipsum desinet. Quod erat demonstrandum.

Hæc per se satis clara, non est necesse operosius demonstrare.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 17.

Demonstratum est propof. 19. circulum cujus radius est medius proportionalis inter EB & AQ segmenti axem, æqualem esse omnibus superficiibus conicis portioni spherica DAF inscriptis.

Dico hunc circulum desinere in circulum, cujus radius est recta AD , a segmenti vertice ducta ad peri-

peripheriam circuli $DQFN$, qui basis est segmenti.

Nam quia jam ex præced. demonstr. liquet EB definire tandem in AE , patebit quoque mediam proportionalem inter EB & AO , definire tandem in mediam proportionalem inter AE & AO ; hoc * est in ipsam AD . Manifestum est * Per corol. 2. p. 8. l. 6. igitur & circulum cujus radius est medius proportionalis inter EB & AO etiam definire in circulum radii AD . Quod erat demonstrandum.

Lemma ad sequen.

SI diameter diametri dupla est, circulus circuli quadruplus erit.

Patet ex propof. 2. l. 12. & defin. 10. lib. 5.

PROPOSITIO XXIV.

Cujusunque sphaera superficies quadrupla est maximi circuli ejusdem sphaera. Fig. 16.

Hoc nobilissimum Archimedis theorema ex jam præmissis expedite demonstrabimus hunc in modum.

Circulo sphaerae maximo circa diametrum AE intelligatur inscripta esse figura ordinata, cujus latera quaternarius metiatur. Quæ circa AE in orbem ducta, producat conicæ superficies, superficiei sphaericæ inscriptas, ducaturque EB . Demonstratum jam supra (a) est, omnes conicæ superficies (a) 18. hujus. sphaerae inscriptas æquales esse circulo, cujus radius potest rectangulam AEB , hoc est cujus radius est medius proportionalis inter AE & EB . Atque hoc semper eveniet, inscriptionibus in infinitum continuatis. Quare cum inscriptæ conicæ superficies (b) tandem definant in sphaericam superficiem, circulus vero cujus radius est medius inter AE , & EB , hujus. definat (c) in circulum cujus radius AE , ipsa quoque sphaerica superficies (d) æqualis erit circulo radii AE , hoc est (e) quadruplo maximi circuli $ACEG$. Quod erat demonstrandum. (b) Per 20. hujus. (c) Per 22. hujus. (d) Per 2. hujus. (e) Per lem. præced.

Viam, qua in theoremate nobilissimo demonstrando hactenus usi sumus, Archimedeo multo breviorẽ & clariorem esse sciet, qui Archimedeum legerit.

Corolla-



Theoremata selecta

Corollarium.

EX hoc præclaro atque admirabili theoremate, quo immortale nomen Archimedes apud omnes Geometras consecutus est, exhibetur circulus æqualis superficiei sphaericae, is nimirum cujus semidiameter est sphaerae diameter, sive cujus diameter dupla est diametri sphaerae.

Scholium.

EXpedita jam erit dimensio superficiei sphaericae, principis inter omnes curvas. Duplex est modus.

1. Mensuretur circulus sphaerae maximus, (ut traditur in scholio post P. 6. hujus,) & multiplicetur per 4. Ut si maximus orbis terræ circulus inventus sit continere quadrata milliarum unius horæ sive Belgica 5,940,000. hic numerus quadruplicatus exhibet quadrata milliarum Belgica 23,760,000. quæ in superficie orbis terræ continentur.

2. Diameter sphaerae multiplicata per circumferentiam maximi circuli exhibet sphaerae superficiem. Ut si terræ diametro dentur milliarum unius horæ 2750 $\frac{1}{4}$, atque inde maximi circuli circumferentia eliciatur milliariorum 8640. hi duo numeri, omiſſa fractione, multiplicati per invicem, dabunt rursum quadrata milliarum unius horæ, 23,760,000. totam orbis terræ superficiem constituentia.

Demonstratio patet ex primo coroll. p. 5. hujus; rectangulum enim sub diametro sphaerae, & maximi circuli circumferentia, per dictum coroll. est quadruplum maximi circuli.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 17.

Cujuscunque portionis sphaericae (*DAF*) superficies equalis est circulo, cujus radius est recta (*AD*) a vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli (*DQFN*) qui portionis est basis.

Portionis maximæ sectioni inscripta cogitetur circa axem *AO* figura æquilatera & paralatera basi dempta; quæ circa *AO* in orbem acta, portioni inscribet conicas superficies.

(a) In 18 & 19. hujus.
(b) Per 19. hujus.

Ducatur quoque recta *EB*, ut (a) supra. Omnes conicæ superficies segmento sphaerico jam inscriptæ æquantur (b) circulo cujus radius est medius proportionalis inter *EB*, & segmenti axem *AO*. Atque hoc multiplicatis in infinitum inscriptionibus semper continget. Quare cum & conicæ superficies segmento

mento inscriptæ, definant (c) in sphericam segmenti superfi- (c) Per 21.
ciem, & circulus cuius radius inter EB & AO medius est, hujus.
definant (d) in circulum radii AD; etiam (e) spherica portio (d) Per 23.
superficies DAF circulo radii AD æqualis erit. Quod erat hujus.
demonstrandum. (e) Per 2.
hujus.

Hoc alterum est ex Archimedis inventis nobilioribus, quod
perinde ac præcedens, via multo, quam ipse, breviori ac
clariori jam demonstravimus.

PROPOSITIO XXVI.

Cylindri recti sphaera circumscripti (HP SV) Fig. 18.
superficies, æqualis est superficiei sphaera.

Et si cylindrus ac sphaera secentur planis ad axem
(BG) rectis, erunt singula superficiei cylindrica seg-
menta segmentis singulis superficiei sphaerica æqualia.

1. Pars. Quoniam cylindri latus HP æquale est (a) PS (a) Per hyp.
diametro basis; erit cylindrica superficies HS, quadrupla (b) (b) Per corol.
baseos, hoc est maximi circuli sphaeræ cylindro inscriptæ; p. 12. hujus.
cujus cum etiam (c) quadrupla sit sphaeræ superficies, erit (c) Per 24.
hæc æqualis cylindricæ. Quod erat demonstrandum. hujus.

2. Pars. Ducantur rectæ BO, GO. Quoniam angulus
BOG (d) rectus est in semicirculo, ab eoque cadit OC per- (d) Per 31.
pendicularis ad BG; erit (e) BO media proportionalis inter (e) Per corol.
GB & BC, hoc est inter IT & HI. Ergo circulus radii 2. p. 8. l. 6.
BO (f) æqualis est superficiei cylindricæ HT. Sed idem (f) Per 11.
circulus æqualis (g) est etiam segmento superficiei sphaericæ hujus.
OBK. Æquales igitur sunt superficies, cylindrica HT, (g) Per præc.
& sphaerica OBK.

Deinde quia eodem modo ostenditur cylindrica HX æ-
quari sphaericæ QBR, etiam reliqua cylindrica IX, reliquæ
sphaericæ QOKR, inter duos parallelos circulos intercep-
tæ, æqualis erit.

Ex his patet de segmentis omnibus.

[Coroll. Hinc superficies cylindri sphaera circumscripti, est
dupla basium.]

PROPOSITIO XXVII.

Segmenta superficiei sphaerica parallelis circulis di- Fig. 18.
visa eam inter se proportionem habent, quam
segmenta diametri (BC, CD, DA, AE, EF, FG)
ad circulos parallelos rectæ.

Sequitur

Sequitur ex præcedenti. Sunt enim sphaericæ superficiei segmenta OBK , $QOKR$, $MQRN$, &c. * æqualia cylindricis, HT , IX , LN &c. Atqui hæc eandem inter se rationem habent, † quam axes segmenta BC , CD , DA , &c. Ergo & illa. Quod erat demonstrandum.

* Per præc.

† Per 13.
l. 12.

Scholium.

EX hac innotescit proportio zonarum & climatum inter se. Sunt enim ad invicem ut segmenta axis, quæ nota sunt ex tabula sinuum.

Ex eadem habetur dimensio segmentorum superficiei sphaericæ. Nam quia & tota sphaeræ superficies nota est ex scholio prop. 24. & segmentorum proportio, utpote eadem quæ partium axis, etiam datur; liquet segmenta singula innotescere.

Cæteram & quatuor præcedentia theoremata, & reliqua omnia quæ sequuntur, omnino singularia atque admiranda sunt, planeque digna, ad quæ intelligenda, Geometrix studiosi ardenti studio incumbant.

Lemma ad sequent.

Fig. 19.

SI sphaeram tangat planum (QN in O ,) recta (AO) ex centro ad contactum ducta est plano tangenti perpendicularis.

Secentur planum tangens QN & sphaera, per tactum O duobus planis, quæ in sphaera quidem producant circulos OG , OD , in plano autem QN rectas CO , IO , quæ circulos contingent in O . Igitur per 18. l. 3. AO perpendicularis est ad utramque IO , CO , ac proinde per 4. l. 11. recta plano QN . Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 20, 21
& 21.

Omnis sphaera equalis est cono (ZO) cujus altitudo (KO) par est radio sphaera; basis vero (Z) superficiei sphaera equalis.

Intelligatur sphaeræ circumscriptum esse corpus aliquod polyedrum, cujus solidi anguli novis planis sphaeram tangentibus absceindantur. Quo facto orietur aliud corpus polyedrum sphaeram continens, minus priore, & pluribus constans angulis, & superficiem habens ex pluribus ac minoribus planis tangentibus compositam. Si polyedri hujus solidi anguli novis plani

tan-

tangentibus iterum abscindantur, & tertii polyedri inde nati similiter; atque ita in infinitum: fiet tandem ut & polyedrum excedat sphaeram solido minori quocunque dato, & superficies ejus ex planis tangentibus (quæ, ut dixi, sine termino & minora, & plura erunt) composita, sphaericam superficiem excedat quoque plano minori, dato quocunque. Quod utrumque, licet demonstrari posset, tamen quia per se satis clarum, postuletur studio brevitatis. His ita constitutis, questum ita concludemus.

Polyedrum jam expositum componitur ex pyramidibus, quarum vertex communis est centrum sphaeræ, bases vero sunt plana tangentia, quæ polyedri superficiem constituunt. Et quia rectæ ex centro A ad singulorum planorum contactus ductæ, ad plana * singula perpendiculares sunt; erunt omnium pyramidum, quibus constat polyedrum, æqualis altitudo, ipse nimirum AB radius sphaeræ. Si jam igitur planum X ponatur æquale superficiei ipsius polyedri, superque eo erecta sit pyramis ad altitudinem MN etiam æqualem sphaeræ radio AB, manifestum est † omnes pyramides supra dictas, hoc est, † per 6. l. 12; totum polyedrum, æquari pyramidi XN. Ad eundem modum reliqua omnia polyedra sphaeram includentia, quæ ex truncatione perpetua solidorum angularum, alia atque alia nascuntur in infinitum, semper æqualia erunt pyramidibus (per XN representatis) quarum altitudines (MN) sunt radius sphaeræ, bases vero (X) æquales superficiei polyedrorum, sphaeram ambientibus. Quare cum tandem, & polyedra (ut dixi supra) in sphaeram, & pyramides XN (ut mox ostendam) in conum ZO desinant; etiam * sphaera cono æqualis erit. * per 1. hujus. Quod erat demonstrandum.

Quod autem pyramides XN † desinant in conum, sic ostendo. Polyedrorum superficies desinunt in sphaeræ superficiem, l. 12. ut postulatum supra. Atqui bases X pyramidum XN, semper æquales ponuntur superficiei polyedrorum; & Z basis coni ZO per hyp. æqualis est superficiei sphaeræ: ergo etiam bases X desinent in basim Z, ac proinde cum pyramides XN sint ad conum ex hyp. æque altum, ut * basis X ad basim Z, etiam pyramides in conum desinent. * per coroll. p. 11. l. 12.

Demonstratio jam allata hujus propositionis & sequentis, penitus diversa est ab ea, qua usus est Archimedes; quæ quidem valde subtilis & ingeniosa est, sed prolixa & ardua; ad quam videlicet adhibentur duo manifesta & propositiones undecim, præter alias non paucas, a quibus illæ dependent. Ipsum vero theorema ab Archimede proponitur hunc in modum: Omnis sphaera quadrupla est coni basim habentis æqualem maximo circulo sphaeræ, altitudinem vero radium.

Scholium.

Scholium.

EX hoc præstabili theoremate figuræ inter corporeas nobilissimæ elicitur dimentio. Nam si diametri sexta pars, sive tertia semidiametri multiplicetur per sphaeræ superficiem jam notam per scholium prop. 24. proveniet sphaeræ soliditas.

Inventa sit sphaeræ terrestris superficies continere quadrata unius horæ milliaria 23, 760, 000. & semidiameter esto miliarium horariorum 1375. cujus tertia pars est $458\frac{1}{3}$. Multiplicet $458\frac{1}{3}$ omiſſa fractione per 23, 760, 000. provenient 10, 882, 080, 000. cubica unius horæ milliaria pro soliditate orbis terræ.

* Per hanc
28.

† Per Schol.
p. 6. hujus.

Cum enim sphaera sit æqualis * cono, cujus altitudo est radius sphaeræ, basis vero superficies sphaeræ; conus autem soliditas † producat ex parte tertia altitudinis, (hoc est radii sphaeræ) ducta in basim, (hoc est in sphaeræ superficiem;) etiam sphaeræ soliditas obtinebitur ex tertia parte radii ducta in superficiem.

PROPOSITIO XXIX.

Omnis sector sphaera æqualis est cono, cujus altitudo est radius sphaera, basis vero sectoris sphaerica superficies.

Fig. 23.

Esto primum sector (AECG) hemisphaerio minor. Intelligatur sectori circumscriptum esse polyedrum corpus rectilineum. Si cætera ratiocinatio omnis ad eundem modum instituat ut in præcedenti, eodem modo concludetur quæsitum. Id solum oportebit ostendere, ex quo discursus totus dependet, superficiem polyedri ex planis sphaericam superficiem ECG undequaque tangentibus compositam, esse majorem superficie ECG. Quod ita fiet. Cogitetur superficie ECG apponi alia æqualis & similis, planis tangentibus eodem prorsus modo cincta quo prior. Erit jam tota * superficies ex planis composita, major tota sphaerica. Ergo etiam dimidia ex planis composita dimidia sphaerica ECG major erit.

* Per axio. 3.
hujus.

† Per præc.

* Patet ex 11.
l. 12.

Esto deinde sector (AEBG) major hemisphaerio. Uterque sector simul sumptus æqualis † est cono cujus altitudo est radius sphaeræ, basis autem tota superficies; hoc est, duobus conis, quorum altitudo eadem, bases vero pares superficiis sphaericæ segmentis ECG, EBG. Atqui sectorum unus
AECG

AECG hemisphærio minør, per 1. partem æquatur cono
cujus altitudo est radius, basis vero superficies ECG. Ergo
alter AEBG æquatur cono reliquo, cujus altitudo est radius,
basis vero superficies reliqua EBG. Quod erat demonstr.

Corollarium.

Cum superficies ECG sit æqualis * circulo radii CG, & su-
perfacies EBG æqualis circulo radii BG; erunt sectores
AECG, & AEBG æquales conis, quorum altitudo est ra-
dius sphære, bases vero circuli radiorum CG & BG.

Scholium.

EX his habetur dimensio & sectorum, & segmentorum
sphære; sectorum quidem, si multiplicetur + tertia pars +
radii per sphæricam sectorum superficiem, jam notam ex
scholio prop. 27. sive per circulum radii CG, vel BG: seg-
mentorum vero, si mensuretur conus EAG, & a sectore, si
minor est hemisphærio, auferatur; si major, eidem adjiciatur.

Segmentum (MQRN) quod inter duos circulos sive paral-
lelos sive non parallelos interjicitur mensurabis, si segmenta
QBR & MBN jam nota auferantur ab invicem.

PROPOSITIO XXX.

Hemisphærium (EOBD) conì (EBD) eam-
dem secum basim & altitudinem habentis,
duplum est.

Conus cujus basis est superficies hemisphærica EOBD, al-
titudo autem radius AB, est ad conum EBD, * ut basis ad
basim, hoc est, ut superficies hemisphærica EOBD ad maxi-
mum circulum PT. Ergo cum superficies hemisphærica
EOBD dupla + sit maximi circuli, etiam conus pro basi ha-
bens superficiem EOBD, pro altitudine radium AB, duplus
est conì EBD. Atqui hemisphærium æquatur * cono ha-
benti pro altitudine radium, pro basi superficiem hemisphæ-
ricam EOBD. Ergo etiam hemisphærium conì EBD du-
plum est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXI.

Sphæra sit divisa in duo segmenta ILBG, ISKG,
plano IQGT, per centrum A non transeunte: dia-
meter autem secanti recta sit BOK;

P

U

Ut altitudo OB segmenti $ILBG$ est ad radium sphaerae AB , ita OK altitudo segmenti alterius fiat ad aliam KN .

Pari modo ut OK altitudo segmenti $ISKG$ est ad radium AK seu AB , ita altitudo OB segmenti alterius fiat ad aliam BD .

Dico 1. Coni ING & IDG quorum altitudines sunt ON , OD , basis vero communis IQT , segmentis sphaericis sunt aequales.

2. Segmentorum eadem est proportio, quae rectarum DO , NO .

3. Segmentum $ISKG$ est ad maximum sibi inscriptum conum IKG , ut NO ad KO ; & segmentum $ILBG$ est ad sibi inscriptum conum maximum IBG , ut DO ad BO .

Pars 1. Sphaera & coni secantur plano per diametrum BK . Producentur in sphaera circulus maximus $BLKG$, in conis vero triangula BIG , IKG . Et quia BOK diameter (a) recta (b) Per defin. est circulo QT , erit angulus IOB (b) rectus. Angulus quoque BIK (c) in semicirculo rectus est. Quoniam igitur in (c) Per 31. l. 3. triangulo BIK ab angulo recto ducta est IO perpendicularis (d) Per 8. l. 6. in basim BK , erit BI ad IO , ut (d) BK ad KI . Ergo ratio duplicata BI ad IO aequalis est rationi duplicatae BK ad KI ; hoc est, (quia BK , KI , KO , (e) sunt tres proportionales,) aequalis rationi BK ad KO . (e) Per corol. 2. p. 8. l. 6. Deinde quia est ut OK ad radium AB , ita (f) OB ad BD , erit quoque invertendo DB ad BO , ut AB ad OK : & permut. DB ad BA , ut BO ad OK : & compon. DA ac BA , ut BK ad OK . Quoniam igitur jam ostendi rationem BK ad OK duplicatam esse rationis BI ad IO , ac proinde aequali (g) Per 2. l. 12. lem (g) rationi circulorum radiis BI , IO descriptorum; erit quoque DA ad BA , ut circulus radii BI ad circulum radii IO . Igitur conus sub altitudine DA , & basi circulo radii IO , hoc est circulo QT , aequalis est (h) cono sub altitudine BA , & basi circulo radii BI , hoc est (i) sectori sphaerico $AIBG$. (h) Per 15. l. 12. (i) Per corol. 2. p. 29. hujus. Quare si tam sectori $AIBG$, quam cono sub DA & circulo QT , addatur idem conus IAG , tota erunt aequalia; videlicet segmentum Sphaericum $ILBG$ aequabitur duobus conis, quorum unus est, qui fit sub basi QT & altitudine DA , alter IAG , sub eadem basi QT , & altitudine OA . Sed hi

dub coni + conficiunt conum IDG. Ergo segmentum† Patet en
ILBG cono IDG æquale erit. Quod erat demonstrandum. 14. l. 12.

Eodem discursu erit segmentum ISKG æquale cono
ING, eo solum mutato, ut conus IAG qui prius adde-
batur, jam auferatur.

Pars 2. Patet ex prima. Nam coni IDG & ING sunt in-
ter se * ut DO, & NO. Ergo & segmenta ILBG, ISKG * per 14. l. 12.
conis illis æqualia, sunt inter se, ut rectæ DO, NO.

Pars 3. Patet similiter ex prima. Nam conus IDG est ad
conum IBG, † ut DO ad BO. Ergo & segmentum ILBG, † Per eandē
cono IDG æquale, est ad conum IBG, ut DO ad BO.

Scholium.

EX prima parte hujus theorematis, habetur alia, eaque fa-
cillima segmentorum sphaericorum dimensio; si nimi-
rum coni IDG, ING mensurentur, quod fiet si * tertiæ par- * Vide schol.
tes rectarum DO, NO ducantur in circulum QT. post 6. hujus.

PROPOSITIO XXXII.

Cylindrus rectus (GK) sphaera, cui circumscri- Fig. 24.
bitur, & soliditate & superficie tota sesqui-
alter est.

Communis sphaeræ ac cylindri axis esto BQ, conus vero
maximus hemisphaerio EOBD inscriptus sit EBD. Quia
cylindrus EK, (semisus totius GK) triplus * est coni EBD; * per 10. l. 12.
hemisphaerium vero † ejusdem coni duplum, patet cylin-† Per 30.
drum EK esse ad hemisphaerium, ut 3. ad 2. Ergo etiam hujus.
totus cylindrus GK est ad totam sphaeram QEBD, ut 3.
ad 2. Quod erat primum.

Deinde quia cylindri latus KN est æquale basis diametro
GN, erit ejus superficies absque basibus * quadrupla baseos * Per coroll.
MI, ac proinde cum basibus, hoc est tota cylindri superfi- P. 12. hujus.
cies erit secupla baseos MI, quæ par est maximo sphaeræ
circulo. Atqui sphaeræ superficies quadrupla est maximi cir-
culi. Ergo tota cylindri GK superficies est ad sphaeræ super-
ficiem, ut 6. ad 4. sive ut 3. ad 2. Quod erat alterum.

Igitur cylindrus sphaeræ sibi inscriptæ & soliditate & tota
superficie sesquialter est. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Quanti hoc theorema fecerit Archimedes argumento est,
quod tumulto suo sphaeram cylindro inscriptam apponi
voluerit. Atque idcirco fortasse inter alia tam multa & præ-
clara

clara inventa sua hoc illi præ reliquis placuit, quod & corporum & superficierum corpora ipsa continentium eadem esset atque una rationalis proportio. Similem affectionum identitatem, annulos inter annulorumque superficies demonstravimus lib. 4. Cylindricorum & annularium prop. 13, 14, 15. sed & ipsa in sphaera aliud mihi hujus rei exemplum illustre sese obtulit. Deprehendi siquidem, quemadmodum sphaera ad cylindrum rectum, se ambientem (qui necessario æquilaterus erit) est tam soliditate quam superficie, ut 2. ad 3. ita sphaeram ad æquilaterum conum se ambientem & soliditate similiter & superficie eam habere proportionem, quam 4. ad 9. Ex quo deinde illud consequitur, sesquialteram proportionem ab Archimede in cylindro & sphaera repertam, in tribus solidis, sphaera, cylindro, & cono æquilatero continuari. Utriusque demonstrationem, pluraque alia theoremata nostra, quibus sphaerae natura mirabilis amplius innotescet, tredecim sequentibus propositionibus comprehensa, subjungam.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 26.

Superficies sphaerae dupla est superficiei cylindri quadrati sphaerae inscripti.

- Quadratum maximo sphaerae circulo inscriptum, a quo in orbem ducto describitur quadratus cylindrus, esto AKL, ducaturque AL, diameter quadrato & sphaerae communis. Quoniam quadratum AL par (a) est quadratis æqualibus AK, KL, erit duplum unitis AK. Ergo etiam circulus diametri AL, duplus (b) est circuli, cujus diameter AK, circuli nempe CN. Atqui superficies sphaerae quadrupla (c) est circuli, cujus diameter AL: is enim est maximus sphaerae circulus, cum AL sit sphaerae diameter. Ergo sphaerae superficies octupla est circuli CN. Sed quia LK, KA, (d) æquales sunt, cylindrica superficies ACL quadrupla (e) est circuli CN. Ergo cum sphaerae superficies ejusdem circuli octupla sit, cylindricæ superficiei dupla erit. Quod erat demonstrandum.
- (a) Per 47. L. 2.
 (b) Patet ex 2. L. 12.
 (c) Per 24. hujus.
 (d) Per hyp.
 (e) Per coroll. p. 12. hujus.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 26.

Sphaera superficies ad totam cylindri quadrati sibi inscripti superficiem eam proportionem habet, quam 4. ad 3.

- Ponantur eadem, quæ demonstr. præced. Quoniam cylindri latus LK & basis diameter AK * æquales sunt, erit superficies cylindrica CL † quadrupla basis CN, ac proinde tota cylindri superficies ad utramque basim CN & SL est ut 6.
- * Per hyp.
 † Per coroll. p. 12. hujus.

ad 2.

ad 2. Atqui sphaerae superficies est ad utramque simul basim CN, SL ut 8. ad 2. cum in præced. ostensa sit esse ad unam basim, ut 8. ad 1. Ergo sphaerae superficies est ad cylindricam CL superficiem ut 8. ad 6. sive ut 4. ad 3. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

TOta cylindri recti sphaerae circumscripti superficies, est ad totam superficiem cylindri æquilateri inscripti, ut 2. ad 1. Nam circumscripta est ad sphaericam ut 12. ad 8. per 32. hujus. Sphaerica autem est ad inscriptam, ut 8. ad 6. per hanc. Ergo ex æquo circumscripta est ad inscriptam, ut 12. ad 6. sive ut 2. ad 1.

PROPOSITIO XXXV.

Cujuscunque portionis sphaerica superficies (ILBG) Fig. 26. vel ad superficiem conici maximi inscripti, eam rationem habet, quam conici latus (BG) ad basis radium (GO.)

Quoniam portionis ILBG superficies (a) æqualis est circulo radii BG, erit proportio ejus ad circulum QT, basim nempe suam & conici, duplicata (b) rationis BG ad GO; hoc est (c) rationis superficiei conicæ IBG ad basim eandem QT. Ergo liquet (d) superficiem ILBG esse ad superficiem conicam IBG, ut eadem conica IBG est ad basim QT. Quare cum conica IBG sit ad basim QT, (e) ut BG ad GO, etiam portionis superficies erit ad conicam IBG sibi inscriptam ut BG ad GO. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVI.

Hemisphaerii superficies (EOBD) ad conici maximi sive recti inscripti superficiem (EBD) eam rationem habet, quam in quadrato diameter ad latus: ad superficiem vero conici similis circumscripti, ut latus in quadrato ad diametrum.

1. Partis demonstratio ex præcedenti est manifesta. Est enim portionis cujuscunque, ac proinde & hemisphaerii superficies EOBD ad conicam inscriptam, ut BD ad DA. Est autem BADK quadratum, cujus diameter est BD, latus DA.

2. Pars. Semissis quadrati circulo (cujus centrum A) circumscripti, esto EBC: quæ circa axem AB circumacta, gignatur

- tur conus hemisphærio conscriptus. Quoniam quadratum
 (a) Patet ex E C duplum (a) est quadrati EB, seu GI, etiam circulus dia-
 47. l. 1. metri EC duplus (b) est circuli cujus diameter GI, hoc est cir-
 (b) Per 2. l. 12. culi HGDI. Atqui (c) superficies hemisphærii cono EBC
 (c) Per 24. inclusi ejusdem circuli dupla est. Ergo circulus diametri EC
 hujus. superficiei hemisphæricæ æqualis est. Quare cum superficies
 (d) Per 14. conica EBC sit ad (d) circulum diametri EC, basim nempe
 hujus. suam, ut latus BE ad basim radium EA; erit quoque ad su-
 perficiem hemisphæricam sibi inscriptam ut BE ad EA, hoc
 est, ut diameter in quadrato ad suum latus. Quod erat de-
 monstrandum.

PROPOSITIO XXXVII.

Fig. eadem
 cum Fig. 13.
 l. 5.

Sphæra ad quadratum rhombum conicum sibi
 circumscriptum, & soliditate & superficie eam
 proportionem habet quam in quadrato latus ad dia-
 metrum.

Maximo sphære circulo HGDI circumscriptum esto qua-
 dratum EBCF, a quo circa axem BF in orbem actio, rhom-
 bus conicus gignatur sphæram ambiens.

- Ut EB quadrati latus (inspice Fig. 6. l. 4.) ad diametrum
 EC, ita fiat S ad R, (inspice Fig. 13. l. 5.) quæ proportio per 4.
 termines S, R, Q, O continuatur: Erit igitur ratio S ad O
 (a) Per defin. triplicata (a) rationis S ad R, hoc est, EB ad EC; & ratio
 10. l. 5. O ad R erit duplicata rationis O ad Q, five R ad S, hoc est,
 (b) Per 20. l. 6. EC ad EB; ac proinde (b) O est ad R, ut quadratum EC ad
 (c) Ex schol. quadratum EB: unde (c) O est dupla ipsius R. His ita consti-
 9. 6. & 7. l. 4. tutis, intelligatur rhombo conico sphæra circumscribi EBCF.
 (d) Per 18. Erit igitur sphæra HGDI ad sphæram EBCF in (d) ratione
 l. 12. triplicata diametri GI (five EB) ad diametrum EC; hoc
 est (quod jam ostendi) erit ut S ad O. Sphæra autem EBCF
 (e) Per 30. est ad rhombum conicum sibi inscriptum (e) ut 2. ad 1. hoc
 hujus. est (quod ostendi supra) ut O ad R. Igitur ex æquo sphæra
 HGDI est ad eundem rhombum, qui ei est circumscriptus,
 ut S est ad R, hoc est, ut in quadrato latus EB ad diametrum
 EC. Quod erat primum. Deinde ex secunda parte præce-
 dentis patet hemisphærii superficiem esse ad superficiem coni
 EBC, ac proinde & totius sphære superficiem esse ad super-
 ficie totius rhombi EBCF, ut latus in quadrato ad dia-
 metrum. Ergo sphæra tam soliditate quam superficie est ad
 rhombum quadratum EBCF, ut in quadrato latus ad dia-
 metrum. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

Superficies portionis (BGKD) conum æquila-^{Fig. 27.}
 terum (BKD) capientis, dupla est superficiei
 ejusdem coni.

Patet similiter ex 35. Nam superficies portionis BGKD
 est ad inscriptam conicam, ut * BK ad BA. Sed quia co-^{Per 35.}
 nus BKD æquilaterus ponitur, KB est æqualis BD, adeo-^{hujus.}
 que dupla BA. Ergo etiam superficies BGKD dupla est
 inscriptæ conicæ BKD. Quod erat demonstrandum,

PROPOSITIO XXXIX.

Sphæra superficies ad totam coni æquilateri sibi^{Fig. 27.}
 inscripti superficiem eam proportionem habet,
 quam 16. ad 9.

Esto Z sphæræ centrum, & conus æquilaterus sphæræ in-
 scriptus BKD, axis sphæræ ac cono communis KZAO.
 Per hunc si secetur sphæra ac conus, producet in sphæra
 circulus maximus OBKD, in cono autem triangulum æqui-
 laterum BKD, cujus unum latus BAD erit diameter baseos
 conicæ QT. Et quia axis coni KA rectus est basi QT, erit
 angulus BAK (a) rectus. Igitur quadratum BA æquale est (a) ^{Per defn.}
 (b) rectangulo KAO. Jam quia latus æquilateri trianguli ^{3. l. 11.}
 abscindit (c) quartam axis partem AO, erit rectangulum (b) ^{Per cor. 1.}
 KAO, hoc est quadratum BA, triplum quadrati (d) AO. (c) ^{Per corol.}
 Quare cum quadratum radii ZO (e) quadruplum sit qua-^{5. p. 15. l. 4.}
 drati AO, erit quadratum radii ZO ad quadratum radii BA, (d) ^{Per 1. l. 6.}
 ut 4. ad 3. Ergo etiam (f) circulus OBKD est ad circu- (e) ^{Per cor. 3.}
 lum QT ut 4. ad 3. Ergo sunt quatuor circuli OBKD, hoc (f) ^{Per 2. l. 12.}
 est (g) tota sphæræ DG superficies, ad circulum QT, ut 16. (g) ^{Per 24.}
 ad 3. Atqui (h) superficies coni æquilateri BKD est ad cir-^{hujus.}
 culum QT, basim nempe suam, ut 2. ad 1. ac proinde coni (h) ^{Per cor. 1.}
 BKD tota superficies, una cum basi scilicet, est ad basim, ^{p. 14. hujus.}
 nempe circulum QT, ut 3. ad 1. sive ut 9. ad 3. Ergo cum
 ostenderim sphæræ superficiem esse ad eundem circulum ut
 16. ad 3. erit sphæræ DG superficies ad totam æquilateri co-
 ni superficiem, ut 16. ad 9. Quod erat demonstrandum.

Aliter.

(a) *Per corol. 5. p. 15. l. 4.* Quoniam æquilateri trianguli latus BD, abscindit (a) quartam axis partem AO, erit quoque spherica superficies BOD (b) quarta pars, ac proinde superficies BGKD tres quartæ superficiei totius spheræ. Quare si superficies tota statuatur esse 16. BGKD superficies erit 12. Atqui superficies BGKD (c) est dupla superficiei conicæ BKD, ac proinde ad eam est ut 12. ad 6. Ergo tota spheræ superficies est ad conicam BKD ut 16. ad 6. Deinde quia superficies coni BKD, (utpote æquilateri,) dupla (d) est baseos QT, liquet superficiem conicam BKD (nimirum absque basi) esse ad totam coni superficiem, ut 2. ad 3. hoc est ut 6. ad 9. Igitur ex æquo tota spheræ superficies est ad totam æquilateri coni inscripti superficiem, ut 16. ad 9. Quod erat demonstr.

PROPOSITIO XL.

Fig. 28.

Sphæra superficies ad æquilateri coni sibi circumscripti totam superficiem, eam proportionem habet, quam 4. ad 9.

Circulo spheræ maximo BPM circumscriptum fit triangulum æquilaterum DOF, a quo circa axem OAB in orbem ducto, productus sit conus æquilaterus spheræ circumscriptus. Æquilatero autem triangulo DOF circumscriptus etiam sit circulus, NDLOF, quem patet esse concentricum priori;

(a) *Per cor. 5. p. 15. l. 4.* & axis OAB producat in N. Quoniam BN est (a) quarta pars axis ON, patet ON esse duplam KB. Quare cum circulorum

(b) *per 2. l. 12.* ratio sit (b) duplicata rationis diametrorum, erit circulus BPM ad circulum NDLOF ut 1. ad 4. Atqui ostensum jam est in demonstratione prima præcedenti, circulum NDLOF esse ad circulum QT, basim coni æquilateri spheræ FL inscripti,

(c) *Per 22. l. 5.* ut 4. ad 3. Ex (c) æquo igitur circulus BPM est ad circulum QT ut 1. ad 3. Atqui tota coni DOF superficies, circuli

(d) *Per cor. 1. p. 14. hujus.* QT (d) tripla est. Ergo tota coni superficies circuli BPM noncupla est. Quare cum spheræ TP superficies ejus-

(e) *per 24. hujus.* dem circuli BPM (e) quadrupla sit, erit tota coni æquilateri DOF superficies ad superficiem spheræ cui circumscripta est, ut 9. ad 4. Quod erat demonstr.

[Coroll. 1. Ex hac demonstratione patet, coni æquilateri spheræ conscripti axem BO sesquialterum esse diametri spheræ BK, seu ut 3. ad 2.

2. Coni DOF basis QT est etiam sesquialtera basium cylindri eidem spheræ circumscripti. Nam QT est ad BPM, ut 3. ad 1. Ergo QT est ad BPM bis, ut 3. ad 2.

3. Super-

3. Superficies conī DOF est superficiei cylindri eidem spha-
ra circumscripti sesquialtera. Illa enim + dupla est QT, hac + Per corol. 1.
* quadrupla BPM. Ergo superficies conica erit ad cylindricam, p. 14 hujus.
ut bis 3. ad quater 1; hoc est, ut 6. ad 4. seu ut 3. ad 2.] 24. hujus.
Per 26 &

PROPOSITIO XLI.

Æquilateri conī sphaera circumscripti tota su- Fig. 28.
perficies quadrupla est superficiei totius conī
inscripti eidem sphaera.

Æquilateri conī DOF circumscripti tota superficies est
ad sphaeræ superficiem, ut (a) 9. ad 4. & sphaeræ superficies (a) Per præc.
est ad conī inscripti æquilateri SKT superficiem totam, ut (b) Per 39.
(b) 16. ad 9. Ergo ex (c) æqualitate perturbata, circumscripti hujus.
æquilateri conī tota superficies est ad totam superficiem æ- (c) per 23. l. 5.
quilateri inscripti, ut 16. ad 4. five ut 4. ad 1. Quod erat
demonstrandum.

PROPOSITIO XLII.

Sphaera ad inscriptum sibi conum æquilaterum (BKC) Fig. 29.
eam rationem habet quam 32. ad 9.

Sphaera & conus BKC secantur plano per axem commu-
nem KO, faciente in sphaera circulum maximum OFKI,
in cono autem in triangulum æquilaterum BKC. Ducto
deinde plano per centrum A ad OK recto, abscindatur he-
misphaerium FGKI, cui inscriptus intelligatur conus maxi-
mus FKI. Quoniam trianguli æquilateri latus BC abscin-
dit OP (a) quartam partem axis OK, erit PK ad AK ut 3. (a) per cor. 1.
ad 2. hoc est ut 9. ad 6. Basis vero QT est ad circulum p. 15. l. 4.
OFKI, hoc est, ad basim ND, ut 3. ad 4. hoc est, ut 6. ad
8. uti patet ex demonstratis prop. 39. Quare cum ratio co-
ni BKC ad conum FKI componatur (b) ex ratione altitu- (b) per schol.
dinis PK ad altitudinem AK (hoc est ex ratione 9. ad 6.) & 2. p. 15. l. 12.
ex ratione basis QT ad basim ND (hoc est ex ratione 6. ad
8.) erit conus BKC ad conum FKI ut 9. ad 8. Quare
cum sphaera CG quadrupla (c) sit conī FKI, erit conus æ- (c) Per 39.
quilaterus BKC ad sphaeram CG, ut 9. ad 32. Quod erat hujus.
demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XLIII.

Fig. 28.

Conus æquilaterus sphaera circumscriptus coni æquilateri eidem sphaera inscripti octuplus est.

Coni æquilateri sphaeræ inscripti & circumscripti sint SKT & DOF, & axis communis esto OKB. Secentur deinde plano per axem tam conus uterque quam sphaera; eruntque sectiones triangula duo æquilatera, & circulus BPM maximus. Circa triangulum quoque DOF intelligatur descriptus esse circulus NDOF, & axis OKB producat in N. Quoniam vero æquilateri trianguli latus DF abscindit axis ON quartam (a) partem NB, patet NO esse duplam BK. Similiter quia æquilateri alterius trianguli latus ST abscindit axeos BK (b) quartam partem BC, erit NO ad BO, ut BK ad CK: & permutando ut NO ad BK, sic BO ad CK. Sed NO dupla est BK. Ergo etiam BO dupla est CK. Igitur ob similitudinem triangulorum DOF, SKT, etiam (c) DF & ST, diametri videlicet basium conicarum, sunt inter se in proportionem dupla. Quare cum coni DOF, SKT sint similes, ac proinde eorum proportio (d) triplicata sit proportionis diametrorum DF & ST: quæ est 2. ad 1. erit conus DOF ad conum SKT, ut 8. ad 1. Quod erat demonstrandum.

(a) Per cor. 5.
p. 15. l. 4.

(b) Per idem
coroll.

(c) Per 4. l. 6.

(d) Per 12.
l. 12.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 28.

Sphaera ad circumscriptum sibi conum æquilaterum (DOF) & soliditate & superficie, eam proportionem habet, quam 4. ad 9.

* Per 42. Sphaera TP est ad inscriptum * sibi conum æquilaterum SKT, ut 32. ad 9. Inscriptus autem SKT conus æquilaterus est ad conum æquilaterum circumscriptum DOF ut 1. ad 8. hoc est ut 9. ad 72. Igitur ex æquo sphaera TP est ad conum æquilaterum circumscriptum DOF, ut 32. ad 72. hoc est ut 4. ad 9. Propositione autem 40. demonstravimus etiam sphaeræ superficiem esse ad totam æquilateri coni circumscripti superficiem ut 4. ad 9. Ergo sphaera & soliditate & superficie est ad æquilaterum conum sibi circumscriptum ut 4. ad 9. Quod erat demonstrandum.

* Per 42.
hujus.

* Per præc.

Quod igitur in sphaera & cylindro sphaeram ambiente miratus est Archimedes, id ipsum in sphaera & æquilatero cono ambiente sphaeram jam demonstravimus, ut videlicet & soliditatum inter se eadem proportio rationalis, quæ superficierum existat. Quemadmodum enim ille reperit sphaeram ad cylindrum

cylindrum esse tam soliditate quam superficie, ut 2. ad 3. ita nos docuimus sphaeram & soliditate & superficie esse ad conum æquilaterum se ambientem, ut 4. ad 9.

Hinc vero illam ipsam proportionem, nempe sesquialteram, quam existere sphaeram inter ac cylindrum Archimedes tradidit, ab æquilatelo cono circumscripto & soliditate etiam ac superficie continuari nullo negotio jam demonstrabimus, atque ita huic pariter opusculo finem imponemus.

PROPOSITIO XLV.

Conus æquilaterus sphaera circumscriptus, & cylindrus rectus sphaera similiter circumscriptus, & ipsa sphaera, eandem proportionem continuant, nempe sesquialteram, tam quoad soliditatem, quam quoad superficiem totam. Vide Fig. qua huic tractatui praefixa est.

Nam per 32. hujus, cylindrus rectus GK sphaeram ambiens tam soliditate quam tota superficie est ad sphaeram ut 3. ad 2. sive ut 6. ad 4. Per præcedentem vero circumscriptus sphaeræ conus æquilaterus BAD, tam soliditate, quam superficie est ad sphaeram ut 9. ad 4. Ergo idem conus est ad cylindrum tam soliditate quam superficie, ut 9. ad 6. Quare hæc tria corpora, conus, cylindrus, sphaera sunt inter se ut hi numeri 9. 6. 4. ac proinde continuant proportionem sesquialteram. Quod erat demonstrandum.

[PROPOSITIO XLVI.]

Inter conum æquilaterum & cylindrum eidem sphaeræ circumscriptos, eadem obtinet ratio sesquialtera, quoad superficies totas, superficies simplices, soliditates, altitudines & bases.

Hac propositio patet, quoad superficies totas & soliditates, ex præcedenti; quoad superficies simplices, ex coroll. 3. prop. 40. hujus; quoad altitudines & bases, ex coroll. 1. & 2. ejusdem prop. 40.]

Ad maiorem Dei Gloriam.

APPEN-

APPENDIX

Qua demonstratur ex falso posse directe deduci verum.

IN thesibus Mathematicis, quas Lovanii sesqui abhinc anno Illustriss. D. Theodorus D'Imerfelle, Comes de Bouchove & S. Imperii, magna ingenii commendatione & auditorum plausu publice propugnavit, inter cæteras proposui assertionem huiusmodi: *ex falsis posse verum directe elici novis exemplis Geometricis confirmamus.* Hanc assertionem sibi oppugnandam suscepit vir Clarissimus Daniel Lipstorpheus in appendice, quam operi suo pererudito, quod Specimina Philosophiæ Cartesianæ inscripsit, hac de causâ adjunxit. Id vero ea modèstia & humanitate præstitit, ut facile appareat, hoc illi unum fuisse propositum, ut veritatem assequeretur. Ne autem videar doctissimi viri iudicium parvi facere, hic illi breviter respondebo, & appendicem reponam.

Conclusionem igitur oppugnatam sic demonstro.

Datur assertio quæ directe ex sua contradictoria inferatur. Talis in prop. 12. l. 9. Eucl. est hæc: *numerus E metitur numerum A.* quæ demonstratione affirmativa inferitur ex sua contradictoria: *E non metitur numerum A.* Quod quidem est æque certum, ac demonstrationem illam esse legitimam? Talis in Elementis hisce nostris prop. 4. l. 11. est hæc: * *Recta B non est perpendicularis plano CAF,* quæ affirmative deducitur ex sua contradictoria: *recta B est perpendicularis plano CAF.* Talis in propositione nostra 35. l. 5. est hæc: † *A est ad B, ut E ad F,* quæ directe inferitur ex sua contradictoria: *A non est ad B, ut E ad F.* Tales denique reperiuntur apud Cardanum l. 5. de proport. p. 201. apud Theodosium (commentante Clavio) l. 1. sph. p. 12. & nos plures similes possumus exhibere tum Geometricas tum alias.

Ecce tibi cosmographicam unam, quam in iisdem thesibus disputandam proposui, *Maris, omnisque adeo humidi superficies eo ipso concluditur esse spherica, quo id negas.* Ponatur vera esse ejus contradictoria: *Maris superficies spherica non est.* Quoniam igitur maris superficies spherica non est; ergo omnes superficiæ maritimæ partes non distant æqualiter à centro. Ergo una est altior altera, (altiore enim esse non aliud

Fig. 12.
p. 11.

Fig. 20.
p. 5.

aliud est, quam longius a centro recedere.) Ergo ex quæ altiores sunt, defluunt versus minus altas seu decliviores; hanc enim esse humidi naturam experientia constat. Ex tali autem defluxu necessario oritur omnium partium superficiei maritimæ æqualis altitudo, seu distantia a centro. Æqualis vero omnium partium superficiei maritimæ a centro distantia infert sphaericitatem ejus perfectam. *Ergo maris superficies sphaerica est.*

Habemus igitur hanc: *Maris superficies sphaerica est*, directe & affirmative deductam ex sua contradictoria, *maris superficies sphaerica non est.*

Maneat igitur, extra omnem controversiam esse, dari assertiones, quæ directe ex suis contradictoriis inferantur. Atqui assertio, quæ ex sua contradictoria directe infertur, necessario vera est, (cum sit axioma per se clarissimum, id necessario verum esse, quod suum contradictorium destruit; destruit autem suum contradictorium, quod ex suo contradictorio directe sequitur.) Ergo & assertionis contradictoria, ex qua videlicet deducta est assertio, falsa est. Ergo ex falso directe & affirmative deductum est verum. Demonstrata igitur est conclusio in thesibus proposita.

Quod vero ejusmodi demonstratio, qua assertio ex sua contradictoria falsa directe infertur, vere scientiam pariat, sic ut absque ulteriori ulla deductione ad impossibile, de assertionis veritate securi esse debeamus, ex jam dictis manifestum est, cum lumine naturæ notissimum sit, id necessario verum esse, quod suum contradictorium destruit, hoc est, quod ex suo contradictorio sequela legitima & necessaria infertur. Quod si verum deducatur ex falso quopiam sibi non contradictorio, nequaquam talis ratiocinatio scientiam pariet, neque enim de veritate assertionis sic deductæ securi esse possumus, cum in eo ratio jam allata deficiat, & proprium falso sciamus esse, ut ex eo falsa deducantur.

His rite perceptis facile eruditus Lector perspiciet, nihil opus esse, ut singulis Clarissimi Viri objectionibus & argumentis refellendis immoremur, quæ vel contra me nihil faciant, vel ex jam dictis soluta intelligantur. Quia tamen non omnibus ad manum erit opus clarissimi Viri, visum est singula breviter attingere.

Primum supponit ex Dialectica quædam de consequentia directa; & dicto (ut vocant) de omni & de nullo. Tam sententiam exponit suam nostræ oppositam. Subjungit deinde: *hanc sententiam meam stabili eversione omnium illorum, quæ in contrarium afferri posse videntur.*

Primum

Primum (inquit) quod ex falsis verum concludere videatur constituit huiusmodi syllogismus: omnis leo est lapis. Omnis adamus est leo. Ergo omnis adamus est lapis. In quo &c. Tali syllogismo ad probandam assertionem meam ego non utor, in quo videlicet verum deducitur ex falso non contradictorio, qui proinde etiam, ut ostendi supra, scientiam non parit. Primum istud igitur me non tangit.

Secundum genus objectionum (inquit) constituunt hypotheses Astronomicae. &c. Quae licet fictitia tantum sint & falsa; tamen juxta eas calculum eclipsibus, & aliis observationibus caelestibus convenientem Astronomi exhibent. Deinde postquam multis contendit, hinc non probari verum ex falso directe elici: Progredior (inquit) ad tertiam instantiam, quam ex regula falsi depromere licet, &c. contenditque rursus hic non elici ex falso verum. Quo quidem in utroque, cum illi ego plane assentiar, neque ullum inde pro assertionem mea argumentum petam: non me magis illa tangunt, quam primum.

Ultimas denique objectiones (inquit) nobis facessunt, modi demonstrandi ab Euclide 9. elem. p. 12. Cardano l. 5. de proport. p. 201. & Theodosio l. 1. sph. p. 12. adhibiti. quo me digitum intendisse putat, & vere. Ex his siquidem demonstrandi modis, evidenter jam demonstravi supra, ex falso elici directe verum; neque assertur quidquam à Clarissimo Viro, quod demonstrationem nostram infirmet. Verbis Clavii ad p. 12. l. 9. recitatis, subjungit ex eodem Clavio demonstrationem p. 12. l. 1. sph. Theodosii: Tum (inquit) ut verum fatear, nescio sane quid Clavio in mentem venerit, uti & Cardano, quare insolitum hunc & mirabilem argumentandi modum esse putaverint: qui tamen Logicis valde familiaris est, & duobus principiis omnium evidentissimis & natura notissimis nititur, hisce nempe; quod idem non possit simul esse & non esse; item, quodlibet aut sit aut non sit. Quid Clavio, Cardano, & cum istis aliisque etiam mihi, in hac argumentandi forma sit visum mirabile, dicere in promptu est; hoc nimirum quod assertio probanda (G est centrum sphaerae,) directe ex sua contradictoria, (G non est centrum sphaerae) consequentiis legitimis ac necessariis deducatur. Quod quidem quotiescunque evenit, admiratione dignum est. Tantum vero abest, ut haec ratio demonstrandi Logicis valde familiaris sit, ut etiam non defuerint doctissimi viri, quibus ea impossibilis videretur. Ut deinde ostendat vir Clariss. hoc discursu verum ex falso non deduci, repetit demonstrationem propositionis Theodosianae, sed forma plane diversa à Claviana illa, quam prius recitaverat, in qua vis argumentationis inter nos controversae

troverſæ clariffime cernitur. Subjungit denique; *neque ego
ſam lynceus ſum ut exinde videre queam, quo pacto ex falſo
verum directe ſequatur. Illud tamen video, quod ſi G demon-
ſtratur non eſſe centrum ſphæra, (vult credo dicere, ponatur,
cum demonſtrari nequeat quod falſum eſt) neceſſario ſit ad-
mittenda contradictoria ejus affirmativa, quod G ſit centrum
ſphæra.* Ad hæc verba repetam compendio demonſtrationem
ſuperius datam, qua, opinor, fiet, ut V. C. tametſi, quod eſt
maxime, lynceus non eſſet, clare perſpiciat elici directe ex
falſo verum.

Quoniam admittit (id quod etiam eo non dante evinceret
Claviana demonſtratio) ſi G ponatur non eſſe centrum, ſequi
neceſſitate absoluta & formali G eſſe centrum; manifeſtum
eſt, G eſſe centrum, directe ſequi ex ſua contradictoria, G
non eſt centrum. Ergo ex vi deductionis conſtat verum eſſe
quod G ſit centrum, cum lumine naturali notum ſit id eſſe
neceſſario verum, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc
eſt, quod ex ſuo contradictorio directe ſequitur. Habemus igitur,
quod ex hac; (G non eſt centrum) directe deducta ſit
hæc vera; (G eſt centrum.) Atqui hæc (G non eſt centrum)
falſa eſt, cum jam oſtenderim veram eſſe hanc (G eſt cen-
trum.) Ergo verum directe deductum eſt ex falſo.

Hæc ſunt, Erudite Lector, quæ ſuper hac quæſtione bre-
viter hic putavi apponenda. Cæterum niſi dubito quin Cla-
riſſimus Lipſtorpius eadem animi æquitate reſponſionem
hanc noſtram ſit accepturus, qua dedit oppugnationem
ſuam, & ego illam accepi.

Ad

Ad Compactorem.

Sex Tabula figurarum affigantur hoc ordine.

Tab. 1. ante pag. 1.	Tab. 4. ante pag. 121.
Tab. 2. ante pag. 39.	Tab. 5. ante pag. 147.
Tab. 3. ante pag. 77.	Tab. 6. ante pag. 175.

Affigantur autem sic, ut cum explicata fuerint, manente intra librum folio albo, figura tota extra librum in conspectum veniant, complicata autem intra libri margines præcisè recipiantur. Expediet vero ita complicari, ut figura, etiam dum complicata fuerint, aspectui pateant.

To the Bookbinder.

Let the six Tables be inserted in the following Order.

Tab. 1. before p. 1.	Tab. 4. before p. 121.
Tab. 2. before p. 39.	Tab. 5. before p. 147.
Tab. 3. before p. 77.	Tab. 6. before p. 175.

And let them be inserted so, that when each Table is unfolded, so far of it as reaches to the Margin of the Book may be white, without Figures; and the rest with the Figures may intirely appear, even tho' the Book it self were shut. But let the Crestings be so ordered, that when each Table with Figures is folded up, it may exactly be contain'd within the Book. But it will be convenient to have that side of each Table which will be expos'd to view, when 'tis folded up, to be that which has the Figures upon it, and not that which is blank, that even then some of the Schemes may be seen.

Au Relieur.

Les 6 Planches des Fig. 7 seront insérées à l'ordre qui suit:

La 1. planche devant la 1. p.	4. planch. devant 121. p.
2. planche devant la 39. p.	5. planch. devant 147. p.
3. planche devant la 77. p.	6. planch. devant 175. p.

Or il faut les attacher en sorte, que la planche estant ouverte, toute la fig. passe précisément la tranche du livre; & qu'ainsi elle paroisse entierement, bien qu'on referme le livre: il faut pourtant qu'estant pliée elle s'ajuste avec le reste de feuilles. Il sera aussi à propos, de les plier en sorte, que les fig. se voyent, & que le dos en soit caché.



